

# Automatique linéaire échantillonnée

Gonzalo Cabodevila

[gonzalo.cabodevila@femto-st.fr](mailto:gonzalo.cabodevila@femto-st.fr)

1<sup>ère</sup> année  
Semestre jaune  
AUT1 - Automatique



**École Nationale Supérieure de  
Mécanique et des Microtechniques**  
26, chemin de l'Épitaphe  
25030 Besançon cedex – FRANCE  
<http://intranet-tice.ens2m.fr>



# Préface

Le choix de l'enseignement de l'automatique échantillonnée dès la première année se fonde sur la constatation que la majorité d'entre vous ont acquis les bases de l'automatique linéaire continue pendant les classes préparatoires. Celles et ceux pour qui cette hypothèse est fautive auront un peu de travail personnel supplémentaire à fournir. Les enseignants sont là pour vous aider, n'hésitez pas à poser des questions. Par ailleurs, la bibliothèque possède quelques ouvrages de qualité tels que [1] et [2] sans oublier les techniques de l'ingénieur, accessibles en ligne au sein de l'école.

Ce polycopié<sup>1</sup> n'est guère qu'un document vous épargnant la recopie de formules, la présence en cours est indispensable. Enfin, je ne saurais que trop vous conseiller de lire d'autres ouvrages traitant du même sujet, notamment [3], [4], [5] ou [6] (vous noterez une étrange ressemblance avec ce dernier ouvrage, c'était mon prof!). Il existe aussi quelques ouvrages au format PDF disponibles gratuitement sur internet ([7], [8], [9], [10], [11]) que je vous conseille vivement de télécharger afin d'avoir une deuxième version des faits.

Le cours est organisé sous la forme de 6 leçons aussi indépendantes que possible. Des rappels des notions utiles pour la compréhension de la leçon seront faits au début de chaque séance, néanmoins une relecture des notes de cours (15mn) est indispensable.

*L'homme de science le sait bien, lui, que seule la science, a pu, au fil des siècles, lui apporter l'horloge pointeuse et le parcmètre automatique sans lesquels il n'est pas de bonheur terrestre possible.*

Pierre Desproges  
Extrait de Vivons heureux en attendant la mort

*Peut-on, dans la vie, triper sur quoi que ce soit, sans se faire un peu chier pour l'apprendre ?*

Pierre Foglia

---

1. Ce cours est rédigé avec L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, les transparents sont faits avec L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X et le package Beamer. Les courbes sont le plus souvent tracées avec Matlab<sup>®</sup> et les dessins sont fait avec Draw de Open Office, Inkscape, les packages PGF et TIKZ ou Matlab.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1.1	Définition . . . . .	9
1.2	Exemples d'asservissements . . . . .	9
1.2.1	Historique . . . . .	9
1.3	Mise en œuvre des asservissements numériques . . . . .	13
1.3.1	Technologie des asservissements . . . . .	14
1.4	Echantillonnage et quantification . . . . .	17
1.4.1	Le bruit de quantification . . . . .	17
1.5	Période d'échantillonnage . . . . .	17
1.5.1	Le problème de la période d'échantillonnage . . . . .	17
1.5.2	Le recouvrement de spectre avec les mains . . . . .	18
1.5.3	Choix de la période d'échantillonnage . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Transformée en <math>z</math></b>	<b>25</b>
2.1	Définition de la transformée en $z$ . . . . .	25
2.2	Propriétés de la transformée en $z$ . . . . .	26
2.3	Calcul de la transformée en $z$ . . . . .	28
2.3.1	Par la formule de définition . . . . .	28
2.3.2	Par la théorie des résidus . . . . .	28
2.3.3	Par l'utilisation des tables . . . . .	28
2.4	Transformée inverse . . . . .	30
2.4.1	Théorie des résidus . . . . .	30
2.4.2	Par division polynomiale . . . . .	30
2.4.3	Par l'utilisation des tables . . . . .	31
2.5	Transmittances échantillonnées . . . . .	32
2.5.1	Notions de schéma bloc . . . . .	32
2.5.2	Transformée en $z$ d'un schéma bloc . . . . .	33
2.5.3	Transformée d'un système précédé par un bloqueur d'ordre 0 . . . . .	33
2.5.4	Transmittances échantillonnées de systèmes bouclés . . . . .	34
2.5.5	Avec Matlab . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Analyse des systèmes</b>	<b>37</b>
3.1	Stabilité . . . . .	37
3.1.1	Conditions de stabilité . . . . .	37
3.1.2	Critère de Jury . . . . .	39
3.1.3	Critère de Routh-Hurwitz appliqué sur la transformée en $w$ . . . . .	40
3.1.4	Avec Matlab . . . . .	40
3.2	Correspondance des plans $z$ et $p$ . . . . .	41
3.3	Le lieu d'Evans . . . . .	44
3.3.1	Définition . . . . .	44
3.3.2	Exemples . . . . .	44
3.4	Précision des systèmes échantillonnés . . . . .	47
3.4.1	Erreur vis-à-vis de la consigne . . . . .	47
3.4.2	Erreur vis-à-vis de la perturbation . . . . .	48
3.4.3	Extension du raisonnement à tous types d'entrées . . . . .	48
3.4.4	Cycle limite . . . . .	50

<b>4</b>	<b>Transposition des correcteurs analogiques</b>	<b>51</b>
4.1	Les différentes approximations de la dérivée . . . . .	51
4.1.1	Différences vers l'arrière . . . . .	51
4.1.2	Différences vers l'avant . . . . .	52
4.1.3	Transformation bilinéaire . . . . .	53
4.1.4	Avec Matlab . . . . .	54
4.2	PID analogique . . . . .	56
4.2.1	Réglages de Ziegler-Nichols . . . . .	56
4.2.2	P, PI, ou PID ? . . . . .	57
4.3	Le PID numérique . . . . .	58
4.3.1	Réglages de Takahashi pour un régulateur PID numérique filtré . . . . .	60
4.4	Mise en œuvre d'un asservissement . . . . .	61
4.4.1	Anti-windup . . . . .	61
4.4.2	Prédicteur de Smith . . . . .	62
4.4.3	Algorithme . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Synthèses à temps d'établissement fini</b>	<b>67</b>
5.1	Synthèse en $z$ de correcteurs . . . . .	67
5.1.1	Exemple idiot... mais riche d'enseignements . . . . .	67
5.2	Synthèses à temps d'établissement fini . . . . .	69
5.2.1	Synthèse à temps d'établissement minimal absolu . . . . .	70
5.2.2	Synthèse à temps d'établissement minimal non absolu . . . . .	70
5.2.3	Réponse pile . . . . .	72
5.2.4	Applications des synthèses à temps d'établissement fini . . . . .	73
5.2.5	Exemples de réponse pile . . . . .	74
5.3	Résolution de l'équation diophantienne . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Méthodes de commande avancées</b>	<b>79</b>
6.1	Choix des pôles en boucle fermée . . . . .	79
6.2	Méthode de Zdan . . . . .	81
6.2.1	Principe . . . . .	81
6.2.2	Correcteur de Zdan . . . . .	81
6.2.3	Rappels sur les systèmes du second ordre . . . . .	83
6.3	Commande RST . . . . .	84
6.3.1	Synthèse de la loi de commande RST . . . . .	85
6.3.2	Choix des polynômes $A_m$ , $B_m$ et $A_0$ . . . . .	86
6.3.3	Cas particuliers du correcteur RST . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>89</b>
7.1	Choix de la méthode de correction . . . . .	89
7.1.1	Exemple 1 : le système est sur-échantillonné . . . . .	89
7.1.2	Exemple 2 : échantillonnage type Bühler . . . . .	90
7.1.3	Exemple 3 : sous-échantillonnage . . . . .	90
	<b>Bibliographie</b>	<b>90</b>
<b>I</b>	<b>Annexes</b>	<b>93</b>
<b>A</b>	<b>Tables de transformées</b>	<b>95</b>
<b>B</b>	<b>Travaux dirigés</b>	<b>99</b>
B.1	TD 1 : Etude d'un cheptel . . . . .	100
B.2	TD 2 : Etude d'un four électrique . . . . .	101
B.3	TD 3 : Synthèses quasi continu . . . . .	102
B.3.1	Correcteur de type Ziegler-Nichols . . . . .	102
B.3.2	Correcteur de type Takahashi . . . . .	102
B.3.3	Implantation sous Matlab-Simulink . . . . .	103
B.3.4	Anti-windup . . . . .	103
B.4	TD 4 : Comparaison des synthèses à temps d'établissement fini . . . . .	104

B.5	TD 5 : Méthode de Zdan . . . . .	105
B.6	TD 6 Correcteur RST . . . . .	106
B.7	TD 7 Asservissement de position d'une machine à courant continu . . . . .	107
B.7.1	Boucle de courant . . . . .	107
B.7.2	Boucle de vitesse . . . . .	108
B.7.3	Boucle de position . . . . .	109
B.7.4	Equation récurrente du correcteur . . . . .	109
<b>C</b>	<b>Annales</b>	<b>111</b>
	Devoir personnel Juin 2006 . . . . .	111
	Examen final Juin 2006 . . . . .	113
	Devoir personnel Juin 2007 . . . . .	117
	Examen final Juin 2007 . . . . .	118
	Examen final Juin 2008 . . . . .	123
	Examen final Janvier 2009 . . . . .	129
	Examen partiel Avril 2010 . . . . .	132
	Examen partiel Décembre 2010 . . . . .	134
	Examen Juin 2011 . . . . .	137
	Examen Janvier 2012 . . . . .	141
	Examen Mai 2012 . . . . .	146
	Examen Juin 2012 . . . . .	148
	Partiel Novembre 2012 . . . . .	154
	Partiel Mars 2013 . . . . .	155
	Examen juin 2014 . . . . .	160





# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Définition

L'automatique est la science qui traite de l'analyse et de la commande des systèmes dynamiques évoluant avec le temps. En d'autres mots de l'automatisation de tâches par des machines fonctionnant sans intervention humaine.

Wikipédia

C'est une partie d'un ensemble plus vaste nommé cybernétique. Définie en 1947 par Norbert Wiener, la cybernétique est la base de la robotique, de l'automatique, de l'intelligence artificielle et de la théorie de l'information.

### 1.2 Exemples d'asservissements

#### 1.2.1 Historique

L'histoire de l'automatique démarre sans doute dès la préhistoire. En effet, le masque du sorcier préhistorique est une première tentative de donner une vie propre à un objet inanimé.

Le système souvent cité comme étant la première réalisation d'un correcteur automatique est la clepsydre de Ktesibios (-270 av. J.C) (figure 1.1). Afin d'améliorer le principe de l'horloge à eau, Ktesibios introduit un réservoir supplémentaire dans lequel le volume de liquide reste constant grâce à un flotteur qui ferme l'entrée du réservoir lorsque celui-ci est trop plein. En gros, c'est une chasse d'eau moderne.

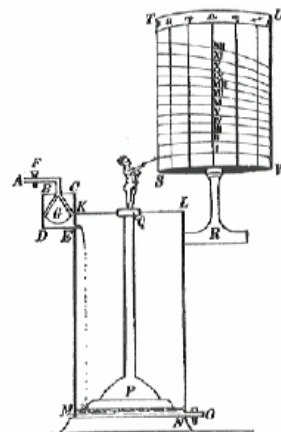


FIGURE 1.1 – Clepsydre de Ktesibios (-270 av. J.C., Alexandrie).

L'horloge, des siècles plus tard, est encore un moteur de découvertes dans le domaine de l'automatique. L'échappement à ancre n'est guère qu'un stabilisateur de fréquence. Les développements de l'horloge conduisent alors à la création d'automates extrêmement compliqués. Citons, à titre d'exemple, le canard de Vaucanson

(1709-1782) (figure 1.2) qui pouvait boire, se nourrir, caqueter, nager, "digérer" et déféquer. L'idée de la programmation est née à peu près à la même époque. En 1728, Jean-Philippe Falcon crée le premier métier à tisser programmable par cartons perforés. Vaucanson réalise un métier à tisser programmé en 1745, et en 1801 le célèbre métier à tisser automatique programmable de Joseph-Marie Jacquard.

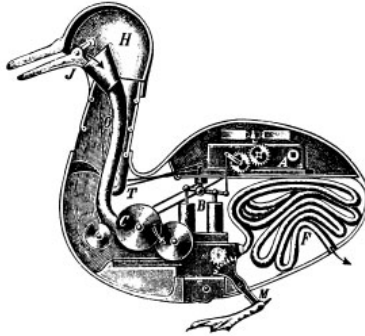


FIGURE 1.2 – Canard de Vaucanson ( $\approx 1739$ ).



FIGURE 1.3 – Métier à tisser programmable.



FIGURE 1.4 – Cartes perforées, le début de la programmation.

A la même époque d'autres systèmes voient le jour, poussés par la révolution industrielle qui est en marche. Denis Papin développe la soupape de sécurité (figure 1.5) pour les systèmes fonctionnant à la vapeur et James Watt invente le régulateur de vitesse à boule (figure 1.6).

Les réalisations précédentes ne manquent pas d'ingéniosité, néanmoins il faudra attendre l'arrivée de l'électricité puis de l'électronique pour voir apparaître les premiers correcteurs en tant que tels. Enfin, le développement des microprocesseurs puis celui des microcontrôleurs permet aujourd'hui de mettre en œuvre des principes de commande très élaborés, notamment :

- les commandes robustes
- l'identification en ligne
- la commande de systèmes non linéaires
- la commande prédictive
- ...

qui sortent du cadre de ce cours.

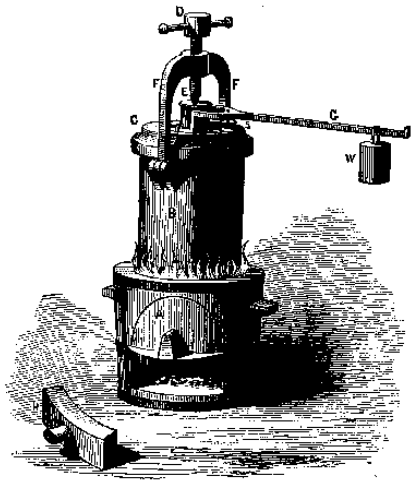


FIGURE 1.5 – Soupape de sécurité de Denis Papin ( $\approx 1679$ ).

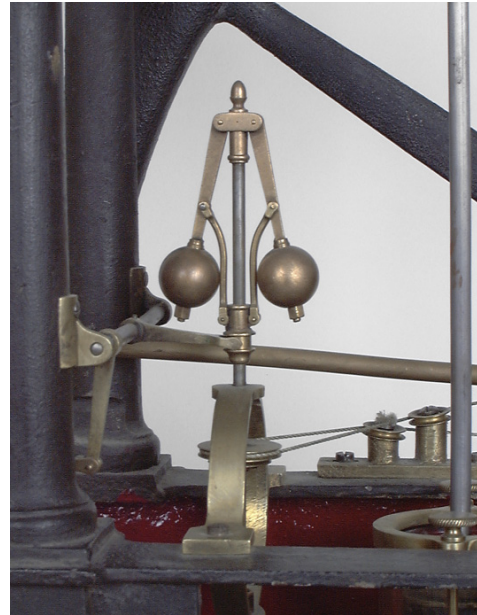


FIGURE 1.6 – Régulateur de vitesse de Watt (1788).

Les figures 1.7 et 1.8 représentent deux exemples de stabilisation de systèmes instables, les figures 1.9 et 1.10 représentent quant à elles deux exemples de systèmes instables pour lesquels le correcteur n'a rien pu faire. Dans les deux cas, le correcteur n'y est pour rien. Une erreur humaine et une erreur de conception sont à l'origine des deux "problèmes".



FIGURE 1.7 – Fusée Ariane (ESA).



FIGURE 1.8 – Avion de combat Rafale (Dassault).



FIGURE 1.9 – Fusée Ariane (ESA).

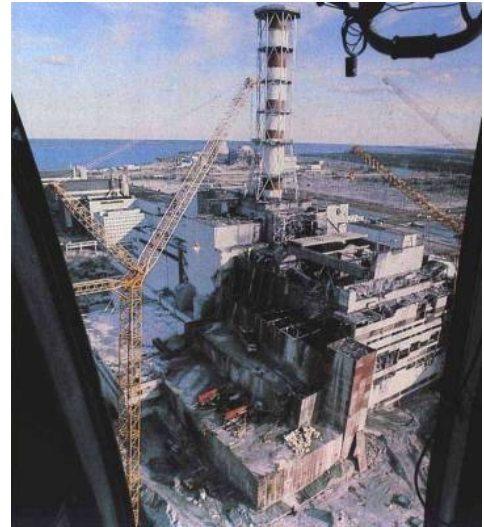


FIGURE 1.10 – Centrale électrique de Tchernobyl.

Retenez encore qu'aujourd'hui sur 100 systèmes méritant d'être asservis :

- 10 le sont effectivement,
- mais 9 sont mal asservis.

### 1.3 Mise en œuvre des asservissements numériques

Le schéma général d'un asservissement analogique est représenté en figure 1.11, sa transposition en commande numérique est représentée en figure 1.12.

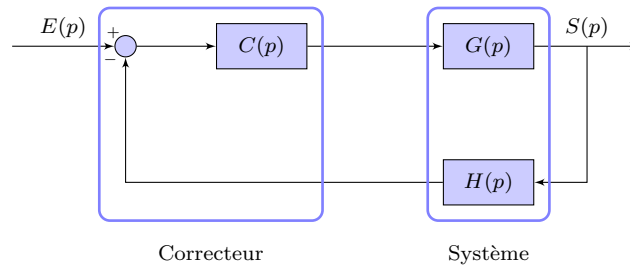


FIGURE 1.11 – Système asservi linéaire continu.

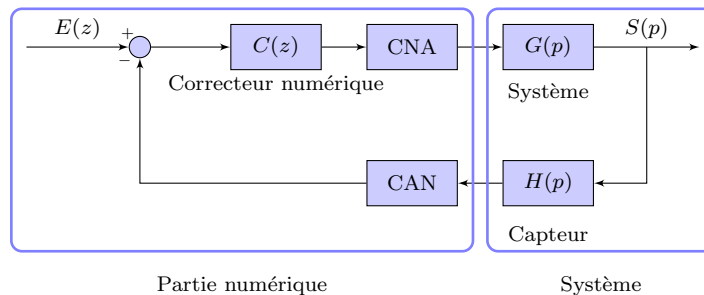


FIGURE 1.12 – Système asservi linéaire échantillonné. (Ne cherchez pas les boîtes CAN et CNA sous simulink, elles n'existent pas ! CAN est intrinsèque en passant de continu à échantillonné, CNA s'appelle en fait ZOH pour "Zero Order Hold".)

Les avantages de l'asservissement numérique sont nombreux, en voici quelques uns.

- Réalisation aisée de régulateurs complexes, lois de commande raffinées.
- Facilité de mise en œuvre de commandes anticipatrices (compensation par rapport à la consigne ou à certaines perturbations).
- Mise en œuvre d'algorithmes de régulation sans équivalent analogique.
- Insensibilité de la caractéristique entrée-sortie du régulateur aux parasites, aux variations de température, au vieillissement, etc.
- Pas de dispersion des paramètres du régulateur en cas de fabrication en série.
- Prise en compte de défauts, des limites et comportements particuliers du système à régler (non linéarités, saturations) par simple programmation.
- Linéarisation autour d'un point de fonctionnement ajustable.
- Générateur de trajectoires intégré.
- Changement de correcteur souple et rapide.
- Interface utilisateur conviviale.
- Plusieurs systèmes corrigés par un seul microprocesseur.

Il y a aussi quelques inconvénients qu'il convient de connaître pour mieux les contourner. Notamment l'observation discontinue de la grandeur réglée, le système est en boucle ouverte entre deux instants d'échantillonnage. Sans précautions particulières, le bouclage numérique insère des non linéarités dans la boucle de régulation dues :

- à la quantification des convertisseurs,
- à la précision de calcul finie du microprocesseur,
- au procédé d'échantillonnage (recouvrement spectral).

Ces non linéarités peuvent avoir un effet déstabilisant (cycles limites) et introduisent des bruits supplémentaires, voire des battements. Un autre phénomène important est l'insertion de retards purs dans la boucle de régulation

due au temps de conversion analogique-numérique (A/N) et numérique-analogique (N/A) et au temps d'exécution de l'algorithme de régulation, or les retards purs sont très déstabilisants.

### 1.3.1 Technologie des asservissements

Le choix du support matériel d'un asservissement numérique est évidemment fonction de l'objet contrôlé. La gamme de supports est vaste, pour fixer les idées voici trois systèmes complets.

Dans le cas de systèmes très complexes, nécessitant plusieurs asservissements simultanés, des interfaces utilisateurs conviviales, le choix se porte sur des calculateurs industriels qui se présentent sous la forme d'un rack dans lequel on insère des cartes à microprocesseur et des cartes d'entrées sorties. La puissance de calcul n'est pas limitée.



FIGURE 1.13 – Kit de développement sur Bus VME.



FIGURE 1.14 – Carte d'acquisition haute densité. 96 voies analogiques 12 bits 3 Méc./s.

La programmation de ces systèmes fait appel à un système d'exploitation multitâche temps réel.

A l'inverse, pour des systèmes simples, un microcontrôleur<sup>1</sup> suffit. La programmation se fait alors en C ou en Assembleur, les microcontrôleurs plus puissants acceptent sans problème un système d'exploitation temps réel<sup>2</sup>.

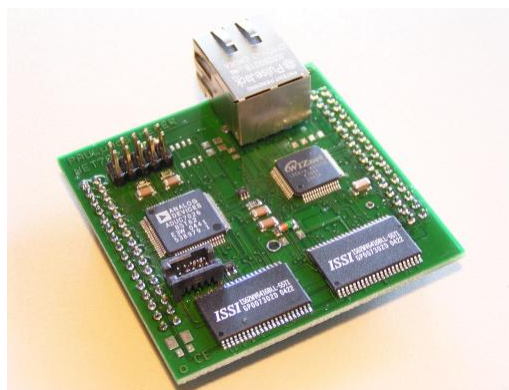


FIGURE 1.15 – Microcontrôleur ADUC.

Entre les deux, il existe des cartes de puissance intermédiaire telle que la SSV DIL/NetPC DNP/5280. Celle-ci possède 8Mo de ROM et 16 Mo de RAM (à comparer aux 8192 mots de ROM et 368 octets de RAM d'un PIC 16F877) ainsi que pratiquement tous les bus classiques (I2C, SPI, CAN et une interface Ethernet)

Enfin, il existe les DSP : Digital Signal Processing, dédiés au calcul rapide et flottant, plutôt utilisés dans des applications nécessitant du traitement du signal conséquent.

Et pour finir, sachez que les PID industriels soit disant analogiques cachent un microcontrôleur, cette technologie permettant de réaliser des constantes de temps impossibles à réaliser en analogique. Mais aussi, de gérer des

1. Microcontrôleur = sur la même puce microprocesseur+ périphériques : horloges, entrées sorties binaires et analogiques, liaisons numériques, ...

2. RTLinux par exemple qui présente l'avantage d'être gratuit.



FIGURE 1.16 – Carte microcontrôle SSV DIL/NetPC DNP/5280.

alarmes, des saturations, des modes de défaut, etc. Vous trouverez au §4.2.1 page 56 une méthode rapide pour déterminer les coefficients de ces correcteurs.



FIGURE 1.17 – Régulateur "analogique" de type PID.

CAN

Afin de faire traiter le signal par un microprocesseur, il faut le lui rendre accessible, c'est le rôle du convertisseur analogique numérique. Plusieurs méthodes de conversion existent <sup>3</sup>.

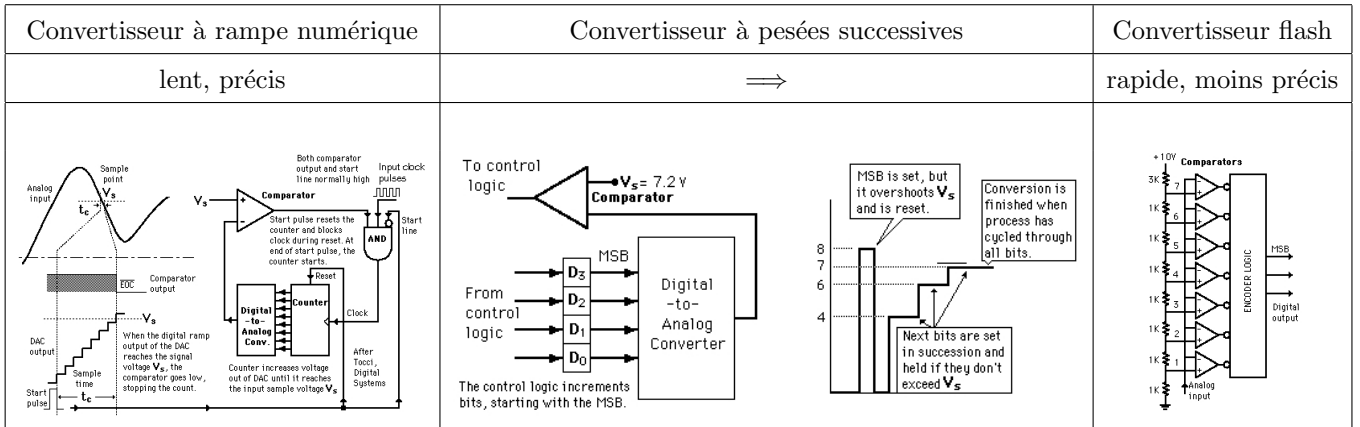


FIGURE 1.18 – Principes de conversion analogique numérique.

CNA

Le convertisseur numérique analogique le plus connu est fondé sur le principe du réseau R-2R comme illustré sur la figure 1.19. Ce principe est très consommateur de surface de silicium, aussi la grande majorité des microcontrôleurs n'en possèdent pas. Une autre méthode de conversion consiste à utiliser le principe de modulation en largeur d'impulsion (MLI, en anglais PWM). Le principe est de faire varier la valeur moyenne du signal de sortie binaire (0 - 5V) en faisant varier la largeur de l'impulsion. Un filtre RC filtrera les variations rapides, ne laissant passer que les variations lentes soit le signal désiré. Ce principe présente l'énorme avantage de ne demander qu'un bit de sortie du microcontrôleur par rapport à 16 bits pour un CNA classique !

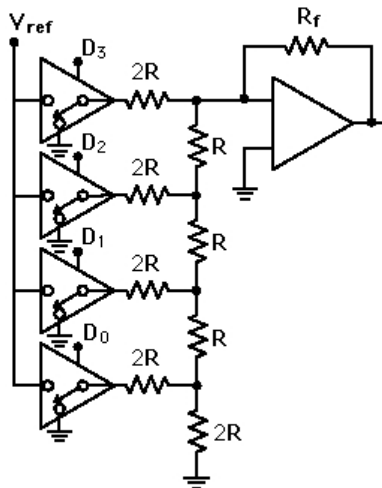


FIGURE 1.19 – Convertisseur numérique analogique de type réseau R-2R.

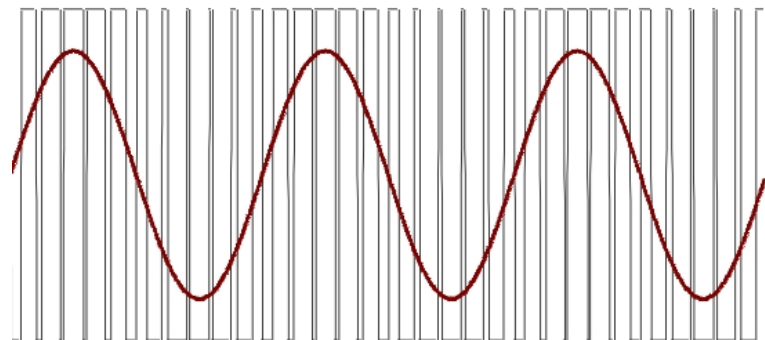


FIGURE 1.20 – Signal modulé en modulation de largeur d'impulsion avant et après filtrage haute fréquence.

3. dessins tirés de : <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electronic/adc.html>



## 1.4 Echantillonnage et quantification

La figure 1.21 montre la différence fondamentale entre le signal analogique et le signal échantillonné et quantifié que le microcontrôleur "perçoit". Ce signal est en fait une suite de nombres codés sur  $n$  bits (typiquement 8 à 16 bits)

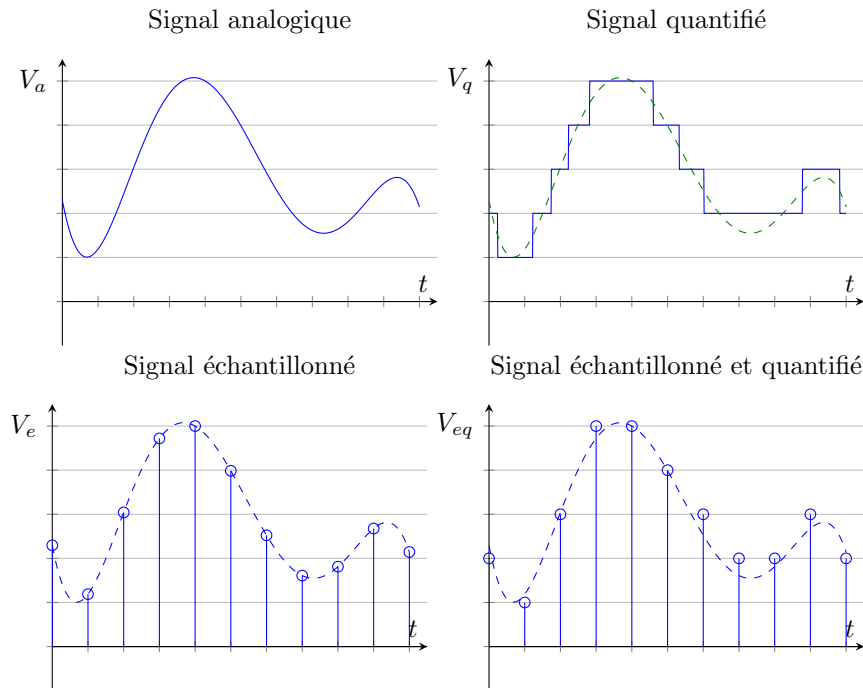


FIGURE 1.21 – Echantillonnage et quantification d'un signal.

En observant le signal échantillonné et quantifié (en bas à droite de la figure 1.21), la tentation est grande de vouloir s'approcher du signal analogique en essayant de faire du "quasi-continu" par un surdimensionnement des deux paramètres principaux que sont la fréquence d'échantillonnage et le pas de quantification. Les deux parties suivantes, je l'espère, vous en dissuaderont.

### 1.4.1 Le bruit de quantification

Pour un signal sinusoïdal d'amplitude égale à la dynamique du convertisseur, le rapport signal à bruit  $SNR^4$  est de :

$$SNR = 6n - 4,76$$

où  $n$  est le nombre de bits du convertisseur

En pratique on choisit  $n$  tel que le rapport signal à bruit de l'ensemble ne soit pas trop diminué par la quantification. Il existe des convertisseurs de : 8, 10, 12, 16, 24 bits. Il existe aussi des convertisseurs ayant une caractéristique logarithmique.

## 1.5 Période d'échantillonnage

### 1.5.1 Le problème de la période d'échantillonnage

La figure 1.23 montre un même signal échantillonné à plusieurs fréquences, lorsque la période d'échantillonnage  $T_e$  est égale à la moitié de la fréquence du signal, on voit qu'il devient impossible de reconstituer le signal original.

En augmentant encore la période d'échantillonnage on tombe sur des aberrations comme illustré en figure 1.24.

4.  $SNR$  : Signal to Noise Ratio

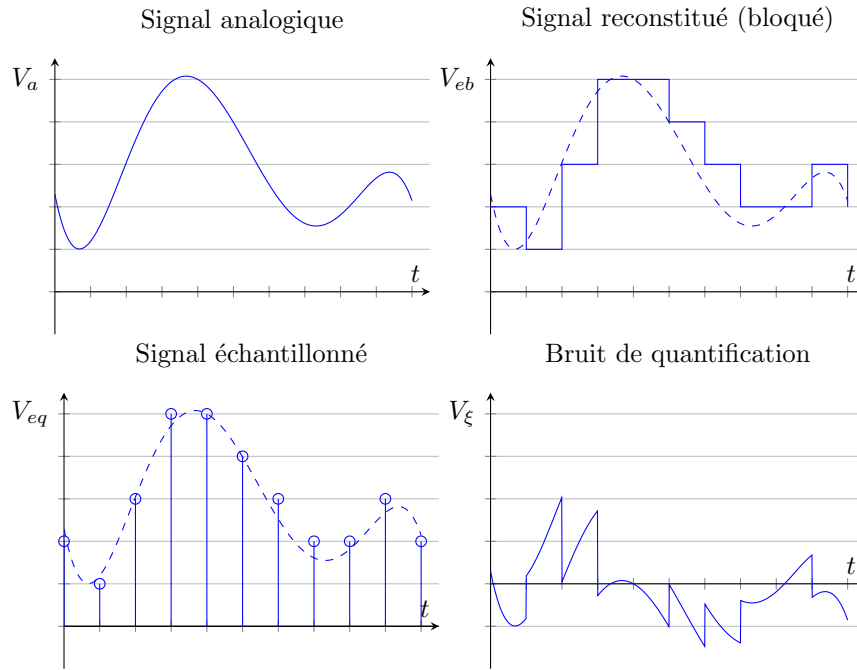


FIGURE 1.22 – Bruit de quantification d’un signal.

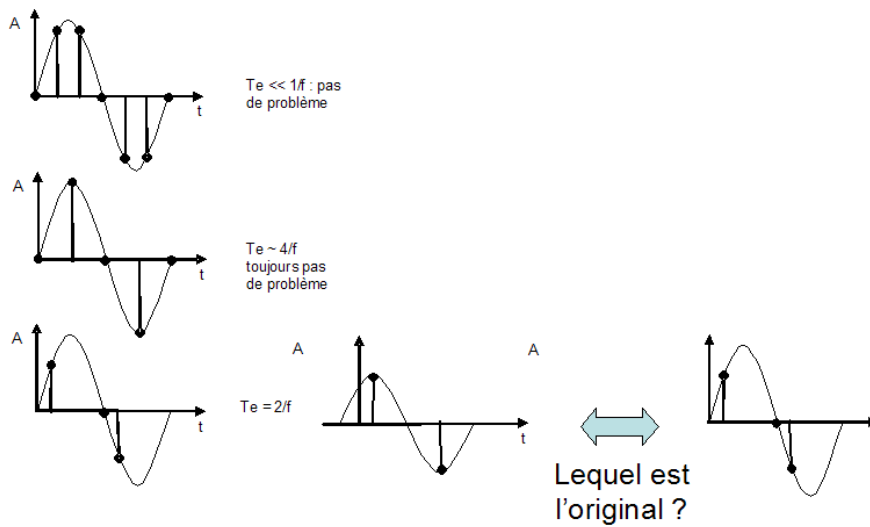


FIGURE 1.23 – Signaux échantillonnés à différentes fréquences.

### 1.5.2 Le recouvrement de spectre avec les mains

Sans entrer dans les détails du traitement du signal rappelons une constante des transformées usuelles, Laplace, Fourier et bientôt  $z$  : le produit de fonctions temporelles est transformé en un produit de convolution dans l’espace opérationnel. En particulier pour la transformée de Fourier :

$$x(t) * y(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} X(f) \times Y(f) \tag{1.1}$$

$$x(t) \times y(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} X(f) * Y(f) \tag{1.2}$$

La relation 1.1 est illustrée en figure 1.25.

En fonction des valeurs relatives de  $F_{max}$  et  $F_e$  on obtient deux types de spectres différents comme illustré en figure 1.26.

Lorsque  $F_{max} > F_e/2$ , il se produit le phénomène de *recouvrement* de spectre, à ne pas confondre avec le

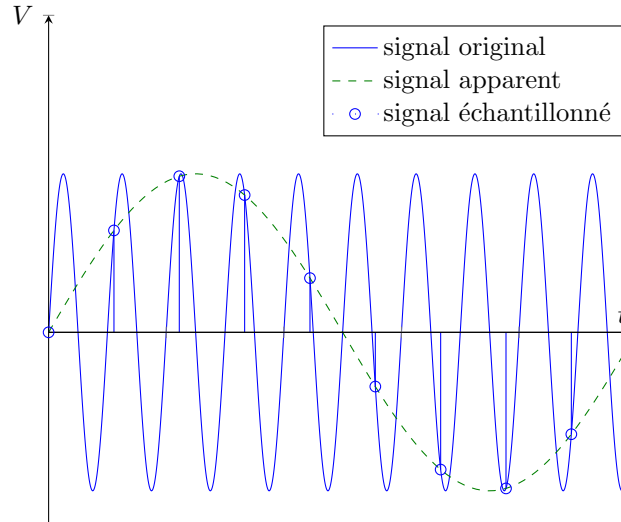


FIGURE 1.24 – Signal ostensiblement sous-échantillonné (Repliement de spectre).

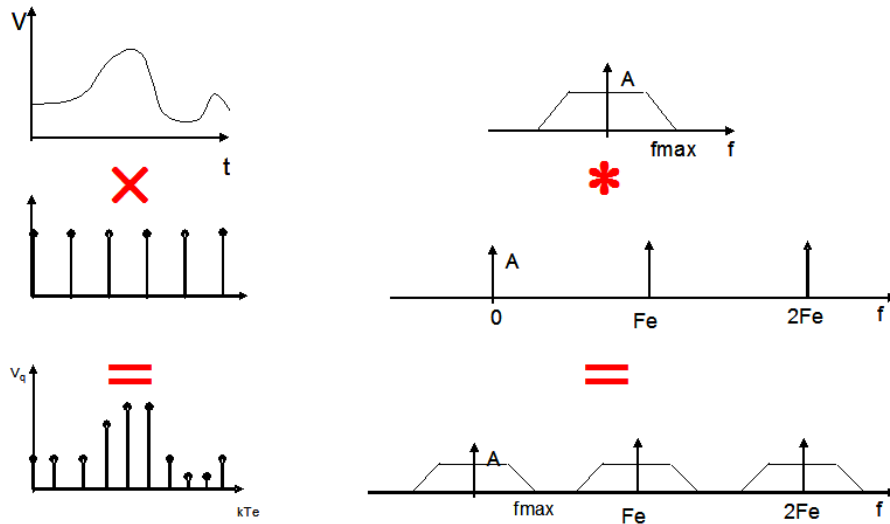


FIGURE 1.25 – Spectre d'un signal échantillonné (échantillonnage parfait).

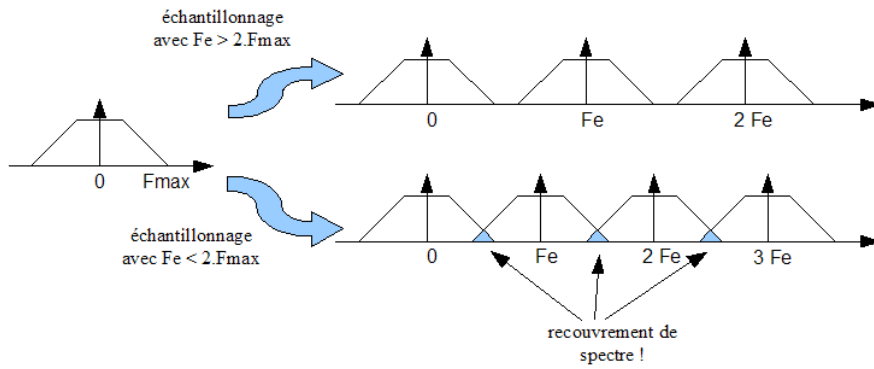


FIGURE 1.26 – Phénomène de recouvrement de spectre.

*repliement* de spectre. Si ce phénomène se produit, il est alors impossible de reconstituer le signal original, d'où le théorème de Shannon :

**Le théorème de Shannon** *Toute fonction du temps  $f(t)$  possédant un spectre de fréquence limité à  $\pm F_{max}$  peut être transformée par échantillonnage périodique, de fréquence  $F_e$  supérieure ou égale à  $2F_{max}$ , sans aucune perte d'information.*

Ce théorème n'est qu'une limite infranchissable, d'autres phénomènes vont intervenir bien avant dans le choix de la période d'échantillonnage.

Notez que l'idée d'un spectre limité à  $F_{max}$  est illusoire, tous les signaux en automatique ont un spectre infini. On ne peut alors que minimiser ce phénomène de recouvrement de spectre. Il sera parfois nécessaire d'ajouter un filtre dit filtre "anti-recouvrement" ou "filtre anti-repliement"<sup>5</sup>.

Le calcul de ce filtre mériterait un chapitre à lui seul. Disons pour faire extrêmement simple, qu'il s'agit le plus souvent d'un filtre électronique passe-bas du premier ordre dont la fréquence de coupure est choisie entre  $F_{max}$  et  $F_e$ .

---

5. Ces deux phénomènes ne sont pas identiques mais une certaine confusion existe dans la littérature...

### 1.5.3 Choix de la période d'échantillonnage

Les considérations précédentes montrent :

- une limite fondamentale : le théorème de Shannon,
- que l'idée de suréchantillonner provoque énormément de bruit sur le calcul des dérivées et demande un microcontrôleur puissant donc cher.

Entre les deux, il existe un vaste choix de fréquences d'échantillonnage. Plusieurs auteurs proposent une formalisation de ce choix, le plus souvent quasi-empirique mais donnant de bons résultats du point de vue du compromis précision - vitesse de calcul nécessaire.

#### Sevely [3]

Yves choisit  $T_e$ , la période d'échantillonnage telle qu'elle soit

$$\frac{2\pi}{18\omega_0} \leq T_e \leq \frac{2\pi}{9\omega_0}$$

$$\frac{\tau}{9} \leq T_e \leq \frac{\tau}{4.5}$$

#### Bühler [4]

Hansruedi choisit  $T_e$ , la période d'échantillonnage telle qu'elle soit

- 5 fois plus petite que la constante de temps la plus rapide que l'on veut contrôler en boucle fermée

$$T_e \simeq \frac{\tau}{5}$$

- 8 fois plus petite que la pseudo-période, s'il s'agit de pôles complexes conjugués

$$T_e \simeq \frac{1}{8} \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$$

#### Critère fréquentiel [9]

On choisit  $F_e$ , la fréquence d'échantillonnage telle qu'elle soit 6 à 24 fois plus grande que la fréquence de coupure du système. Soit pour un système d'ordre 1 :

$$\tau \geq T_e \geq \frac{\tau}{4}$$

Pour un système d'ordre 2 :  $\frac{k}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$   
soit :

$$0.25 < \omega_0 T < 1\xi = 0.7$$

$$0.4 < \omega_0 T < 1.75\xi = 1$$

#### Exemple

Soit  $G(p)$  une fonction de transfert possédant 4 pôles en boucle ouverte :

$$G(p) = \frac{1}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_3 p)(1 + \tau_4 p)}$$

Après mise en œuvre de l'asservissement vous espérez accélérer le système, la fonction de transfert devient donc

$$F(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)} = \frac{1}{(1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2})(1 + \tau_3' p)(1 + \tau_4' p)}$$

Quelques valeurs numériques pour fixer les idées :

- $\tau_3' = 1s$ ,
- $\omega_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\xi = 0.43$  (réglage classique à 20% de dépassement),
- on ne cherche pas à contrôler  $\tau_4$ .

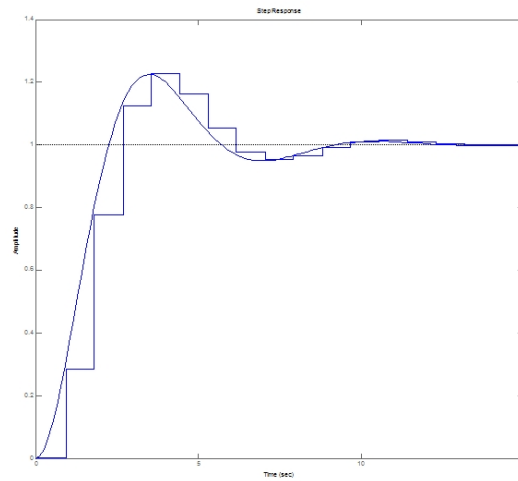


FIGURE 1.27 – Réponse d'un second ordre échantillonné (mais pas quantifié!). Observez le retard introduit par l'échantillonnage.

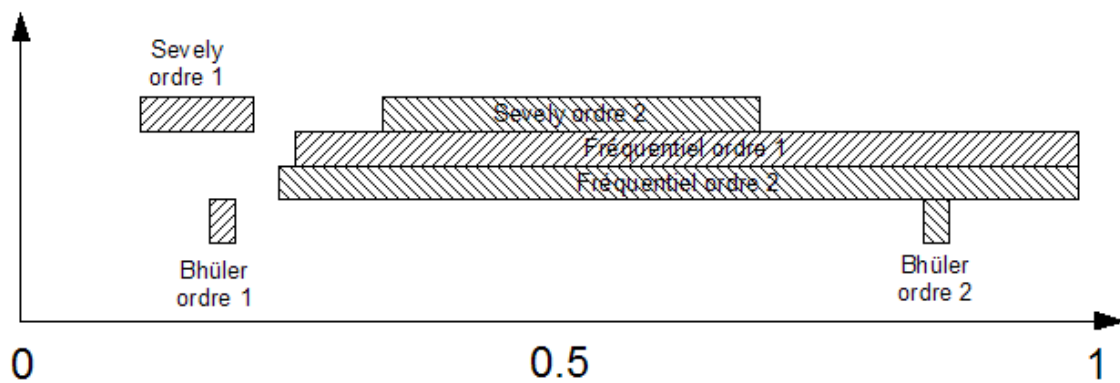


FIGURE 1.28 – Comparaison des périodes d'échantillonnages préconisées par différents auteurs.

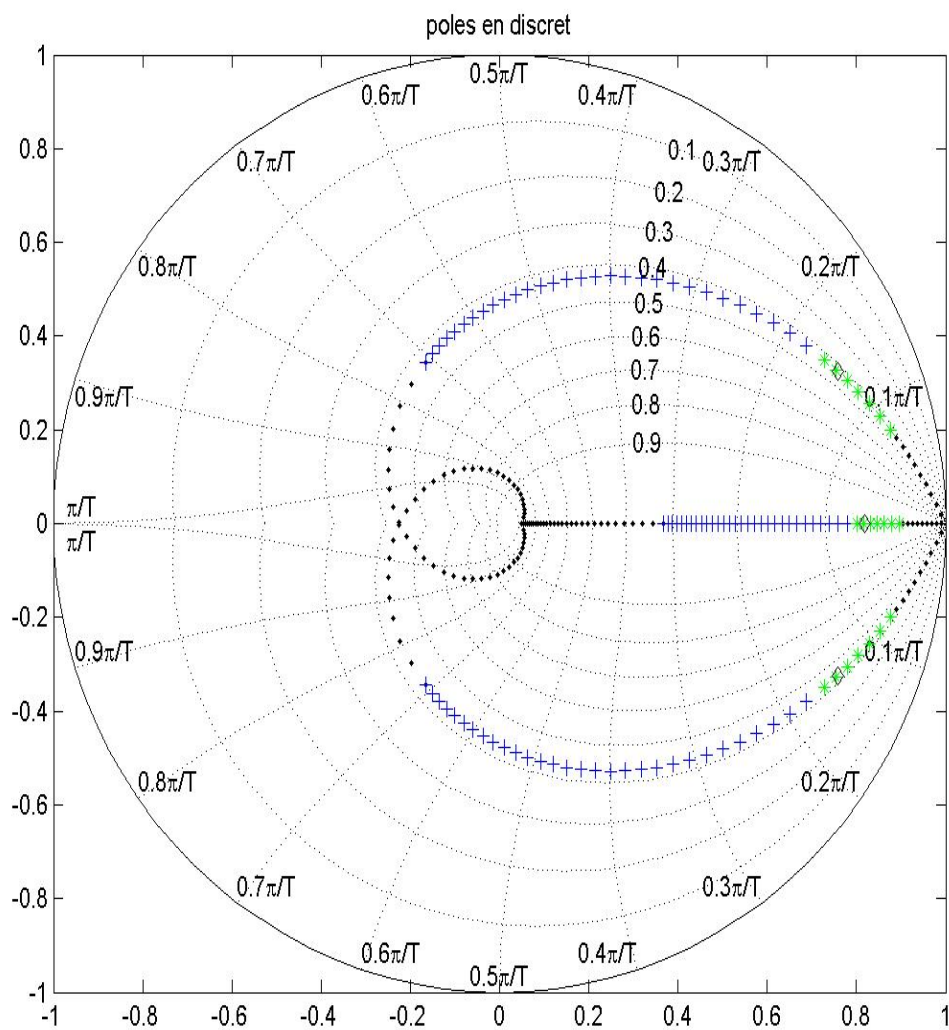


FIGURE 1.29 – Lieu des pôles en  $z$  en fonction de la période d'échantillonnage.

...  $T_e$  varie de 0.01s à 3s.

◇ Bühler

\*\*\* Sevely

+++ critère fréquentiel





# Chapitre 2

## Transformée en $z$

### 2.1 Définition de la transformée en $z$

On appelle transformée en  $z$  d'un signal  $f(t)$  la transformée de Laplace  $F^*(p)$  du signal échantillonné  $f^*(t)$ , dans laquelle on effectue la substitution

$$z = e^{T_e p} \quad (2.1)$$

Notation :  $\mathcal{Z}[F(p)]$  ou  $\mathcal{Z}[f(t)]$

Rappel : transformée de Laplace d'un signal

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

le signal  $f(t)$  échantillonné s'écrit  $f^*(t)$  avec :

$$f^*(t) = f(t)\delta_{T_e}(t)$$

avec  $\delta_{T_e} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e)$   $k \in \mathbb{Z}$  peigne de Dirac

Ainsi la transformée de Laplace du signal échantillonné est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^*(t)] &= \int_0^{\infty} \left( f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e) \right) e^{-pt} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(t)\delta(t - kT_e)e^{-pt} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e)e^{-kT_e p} \end{aligned}$$

la fonction  $f$  étant nulle pour tout  $t < 0$ ,

$$F^*(p) = \mathcal{L}[f^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)e^{-kT_e p}$$

puis en posant  $z = e^{T_e p}$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)z^{-k} \quad (2.2)$$

Exemple :

$f(t) = \mathcal{H}(t)$  échelon d'Heaviside

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Rappel : Somme d'une suite géométrique :

*premier terme qui y est moins premier terme qui n'y est pas sur un moins la raison.*

## 2.2 Propriétés de la transformée en $z$

Comme la transformée en  $z$  est la transformée de Laplace suivie d'un changement de variable, ses propriétés se déduisent de celles de la transformée de Laplace.

### Linéarité

$$\mathcal{Z}[af(t) + bg(t)] = aF(z) + bG(z) \quad (2.3)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes

### Translations réelles

#### Retard de $k$ périodes

$$\mathcal{Z}[f(t - kT_e)\mathcal{H}(t - kT_e)] = z^{-k}F(z) \quad (2.4)$$

Notez l'opérateur "retard"  $z^{-1}$

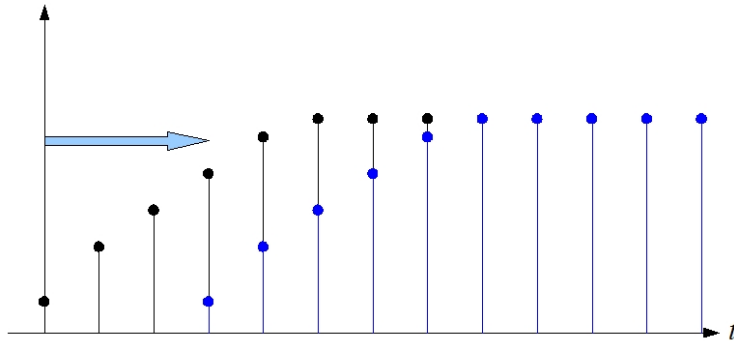


FIGURE 2.1 – Illustration de la propriété du retard.

#### Avance de $k$ périodes

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(t + kT_e)\mathcal{H}(t)] &= z^k F(z) - z^k f(0) - z^{k-1} f(T_e) - z^{k-2} f(2T_e) - \dots - z f((k-1)T_e) \\ \mathcal{Z}[f(t + kT_e)\mathcal{H}(t)] &= z^k \left[ F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f(nT_e) z^{-n} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Les valeurs initiales sont enlevées, sinon, le principe de causalité n'est plus respecté.

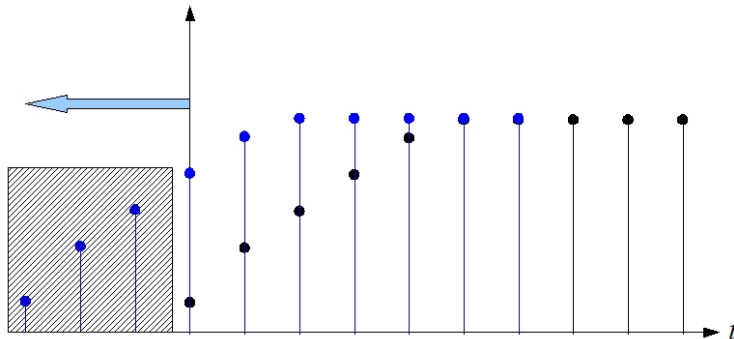


FIGURE 2.2 – Illustration de la propriété de l'avance.

### Translation complexe

$$\mathcal{Z}[e^{-aT_e} f(t)] = \mathcal{Z}[F(p + a)] = F(ze^{aT_e}) \quad (2.6)$$

**Changement d'échelle en  $z$**

$$\mathcal{Z}[a^k f(kT_e)] = F\left(\frac{z}{a}\right) \quad (2.7)$$

**Théorème de la valeur finale**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z) \quad (2.8)$$

**Théorème de la valeur initiale**

$$\lim_{t \rightarrow 0} f^*(t) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT_e) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (2.9)$$

**Théorème de la convolution discrète**

$$\mathcal{Z}[f(kT_e) \star g(kT_e)] = \mathcal{Z}\left[\sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e)g((k-n)T_e)\right] = F(z)G(z) \quad (2.10)$$

C'est le théorème fondamental qui permet de transformer l'équation de la sortie d'un système,

en temporel : *sortie = convolution de l'entrée avec la réponse impulsionnelle du système,*

en  $z$  : *sortie = produit de l'entrée avec la transmittance du système.*

**Multiplication par  $t$**

$$\mathcal{Z}[tf(t)] = -T_e z \frac{d}{dz} F(z) \quad (2.11)$$

Très utile pour démontrer la forme des signaux canoniques

**Théorème de sommation** Soit  $g(kT_e) = \sum_{n=0}^k f(nT_e)$ ,  $g$  est la somme des échantillons de  $f$  depuis l'origine des temps jusqu'à l'instant présent.

$$\mathcal{Z}[g(kT_e)] = \mathcal{Z}\left[\sum_{n=0}^k f(nT_e)\right] = \frac{z}{z-1} F(z) \quad (2.12)$$

---

**Pour aller plus loin :** Démontrez le théorème de la convolution discrète

---

## 2.3 Calcul de la transformée en $z$

### 2.3.1 Par la formule de définition

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) z^{-k} \quad (2.13)$$

Cette méthode est souvent lourde à mettre en œuvre.

Exemples :

$$f(t) = e^{\lambda t}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\lambda k T_e} z^{-k} = 1 + e^{\lambda T_e} z^{-1} + e^{2\lambda T_e} z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - e^{\lambda T_e} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{\lambda T_e}}$$

$$f(t) = t$$

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} k T_e z^{-k} = T_e \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} = z T_e \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k-1} \\ &= -z T_e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} z^{-k} = -z T_e \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= -z T_e \frac{d}{dz} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z T_e z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2} \\ &= \frac{T_e z}{(z - 1)^2} \end{aligned}$$

### 2.3.2 Par la théorie des résidus

C'est la méthode la plus à même de traiter tous les cas ! Néanmoins elle implique la connaissance de la théorie des résidus. Elle n'est donc donnée qu'à titre informatif.

$$F(z) = \sum_{\xi_i} \text{Résidus} \left\{ \frac{F(\xi)}{1 - e^{\xi T_e} z^{-1}} \right\}_{\xi = \xi_i}$$

où les  $\xi_i$  sont les pôles de la fonction de transfert  $F(p)$

Rappel : Théorie des résidus.

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2j\pi \sum \text{Res}$$

avec

$$\text{Res}(a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left( \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)] \right)$$

si le pôle  $a$  est un pôle simple d'ordre  $n$

### 2.3.3 Par l'utilisation des tables

Ce sera la méthode utilisée dans le cadre de ce cours. Le plus souvent on possède la transformée de Laplace du système. On procède à une décomposition en éléments simples puis, à l'aide du tableau A.1 donné en page 96, on obtient la transformée en  $z$ . Notez que la connaissance des propriétés de la transformée en  $z$  est souvent nécessaire.

#### Exemple

Soit à transformer en  $z$ , le système donné par sa fonction de transfert en  $p$  :

$$F(p) = \frac{4p^3}{(p^2 + 1)(p + 1)^3}$$

### Décomposition en éléments simples

La forme de sa décomposition en éléments simples se déduit de la valeur et de la multiplicité de ses pôles. Il existe des réels  $a, b, c, d, e, f$  et un polynôme réel  $E$  tels que :

$$\frac{4p^3}{(p^2+1)(p+1)^3} = E + \frac{a}{p+1} + \frac{b}{(p+1)^2} + \frac{c}{(p+1)^3} + \frac{(dp+e)}{(p^2+1)}$$

Il s'agit désormais de déterminer la valeur de chaque coefficient indéterminé.

- Le degré du numérateur de  $F$  est strictement inférieur au degré de son dénominateur, donc  $E = 0$ .
- On multiplie de part et d'autre par  $(p+1)^3$  et on fait  $p = -1$  pour obtenir  $c = -2$ .
- De même, on multiplie de part et d'autre par  $(p^2+1)$  et on fait  $p = i$  pour obtenir  $d = 1$  et  $e = -1$ .
- On étudie ensuite la limite de  $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$ , ce qui donne  $a + d = 0$  d'où  $a = -1$ .
- Puis on calcule  $F(0) = 0$  d'où  $0 = a + b + c + e$  et donc  $b = 4$ .

Vérification, calculer par exemple  $F(1) = 1/4$ .

Ainsi la décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{4p^3}{(p^2+1)(p+1)^3} = -\frac{1}{p+1} + \frac{4}{(p+1)^2} - \frac{2}{(p+1)^3} + \frac{(p-1)}{(p^2+1)}$$

### Transformation en $z$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p+1} &\longrightarrow -\frac{z}{z-e^{-T_e}} \\ \frac{4}{(p+1)^2} &\longrightarrow 4\frac{T_e z e^{-T_e}}{(z-e^{-T_e})^2} \\ \frac{p-1}{(p^2+1)} &= \frac{p}{(p^2+1)} - \frac{1}{(p^2+1)} \longrightarrow \frac{z(z-\cos T_e)}{z^2-2z\cos T_e+1} - \frac{z\sin T_e}{z^2-2z\cos T_e+1} \\ -\frac{2}{(p+1)^3} &\longrightarrow \text{????} \end{aligned}$$

mais

$$\frac{1}{(p+a)^2} \longrightarrow t e^{-at} \longrightarrow \frac{T_e z e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2}$$

et

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}t^2 e^{-at}\right] = \frac{1}{(p+a)^3}$$

sachant

$$\mathcal{Z}[tf(t)] = -T_e z \frac{d}{dz} F(z)$$

donc

$$\mathcal{Z}[t \times t e^{-at}] = -T_e z \frac{d}{dz} \left[ \frac{T_e z e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2} \right] = -T_e z \left[ \frac{T_e e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2} - 2 \frac{T_e z e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^3} \right] = \frac{T_e^2 e^{-aT_e} z (z+e^{-aT_e})}{(z-e^{-aT_e})^3}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[\frac{4p^3}{(p^2+1)(p+1)^3}\right] &= -\frac{z}{z-e^{-T_e}} + 4\frac{T_e z e^{-T_e}}{(z-e^{-T_e})^2} \\ &+ \frac{T_e^2 e^{-T_e} z (z+e^{-T_e})}{(z-e^{-T_e})^3} \\ &+ \frac{z(z-\cos T_e)}{z^2-2z\cos T_e+1} - \frac{z\sin T_e}{z^2-2z\cos T_e+1} \\ &= -\frac{z^3 - e^{-T_e}(T_e^2 + 4T_e + 2)z^2 + e^{-2T_e}(4T_e + 1 - T_e^2)z}{(z-e^{-T_e})^3} + \frac{z^2 - z(\cos T_e + \sin T_e)}{z^2 - 2z\cos T_e + 1} \end{aligned}$$

## 2.4 Transformée inverse

Il s'agit, le plus souvent de revenir à l'original temporel, soit pour tracer la sortie d'un système échantillonné soit pour retrouver l'équation récurrente, d'un correcteur pour l'implanter dans le calculateur.

### 2.4.1 Théorie des résidus

Celle-ci n'est donnée à titre informatif, elle ne sera jamais utilisée dans le cadre de ce cours. C'est la méthode la plus complexe à appliquer à la main, par contre elle est extrêmement simple à utiliser avec les logiciels de calcul symbolique tels que Maple ou Mathematica. C'est en outre la plus apte à "aller plus loin".

$$f(kT_e) = \sum_{\xi_i} \text{Résidus}\{z^{k-1}F(\xi)\}_{\xi=\xi_i}$$

où les  $\xi_i$  sont les pôles de la fonction de transfert  $F(z)$

Exemple :

$$F(z) = \frac{z}{z-a} \frac{z}{z-1}$$

Il y a deux résidus en  $z = a$  et en  $z = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=1} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2}{z-a} z^{k-1} = \frac{1}{1-a} \\ \text{Res}_{z=a} &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{z^2}{z-1} z^{k-1} = \frac{a^{k+1}}{a-1} \end{aligned}$$

donc

$$F(kT_e) = \frac{1}{1-a} + \frac{a^{k+1}}{a-1} = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}$$

### 2.4.2 Par division polynomiale

On ne cherche alors que les premiers échantillons de la réponse d'un système à une entrée spécifiée.

Exemple : original de  $\frac{z}{z-0.5}$

$$\begin{array}{r|l} z & z - 0.5 \\ -z + 0.5 & \hline 0 + 0.5 & 1 + 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2} + \dots \\ & \\ & -0.5 + 0.25z^{-1} \\ & \hline & 0 + 0.25z^{-1} \end{array} \quad (2.14)$$

$f^*(t) = \delta(t) + 0.5\delta(t - T_e) + 0.25\delta(t - 2T_e) + \dots$  donc  $f(0) = 1$ ,  $f(T_e) = 0.5$ ,  $f(2T_e) = 0.25, \dots$

### 2.4.3 Par l'utilisation des tables

Méthode : décomposer  $\frac{F(z)}{z}$  en éléments simples, puis à l'aide du tableau A.1 donné en page 96 retrouver les originaux  $f_i(t)$ .

- Décomposer  $\frac{F(z)}{z}$  en éléments simples,
- rechercher les racines du dénominateur  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ,
- construire :

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_1}{z - z_1} + \frac{C_2}{z - z_2} + \frac{C_3}{z - z_3} + \dots + \frac{C_n}{z - z_n},$$

- revenir à :

$$F(z) = \frac{C_1 z}{z - z_1} + \frac{C_2 z}{z - z_2} + \frac{C_3 z}{z - z_3} + \dots + \frac{C_n z}{z - z_n}.$$

- Puis en utilisant :

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{z}{z - a} \right] = a^k,$$

- on obtient :

$$f(kT_e) = C_1 z_1^k + C_2 z_2^k + C_3 z_3^k + \dots + C_n z_n^k.$$

Remarque : les  $z_i$  peuvent être complexes, mais sont complexes conjugués deux à deux.

#### En résumé

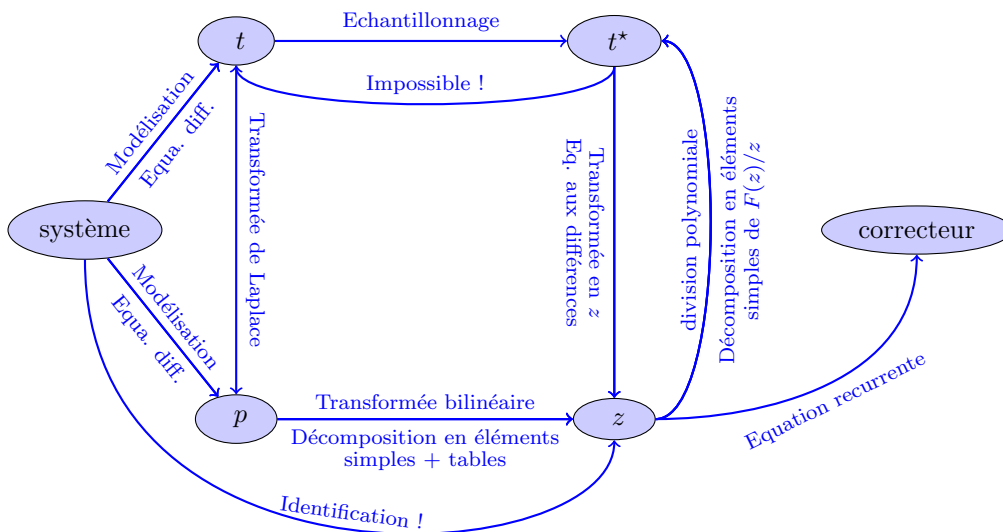


FIGURE 2.3 – Ensemble des transformations.

## 2.5 Transmittances échantillonnées

Il existe plusieurs façons de calculer la transmittance échantillonnée d'un système. Nous verrons tour à tour deux méthodes différentes. La transformée d'un système précédé d'un bloqueur d'ordre 0, qui fait l'hypothèse que l'entrée du système est constante entre deux instants d'échantillonnage (ce qui est vrai, c'est même la fonction du bloqueur d'ordre 0!). Puis, nous verrons la transformée bilinéaire au paragraphe 4.1.3, qui reproduit un peu mieux la réponse fréquentielle d'un système.

### 2.5.1 Notions de schéma bloc

Rappels sur la réduction des schémas-blocs

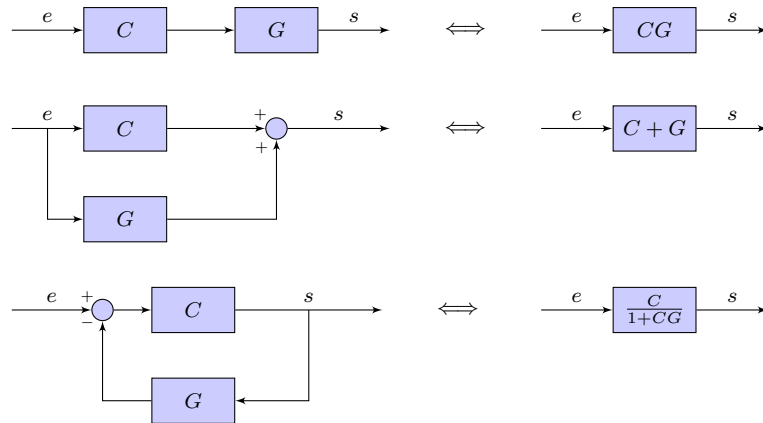


FIGURE 2.4 – Opérations fondamentales de réduction des graphes. Le schéma de droite est équivalent à celui de gauche.

---

**Pour aller plus loin :** Donner la fonction de transfert du système décrit à la figure 2.5.

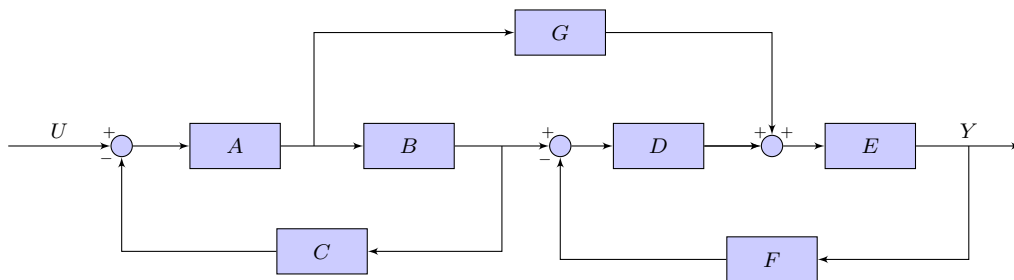


FIGURE 2.5 – Exercice : montrer que ce schéma se réduit à un bloc de transmittance :  $\frac{Y}{U} = \frac{ABDE+AGE}{(1+ABC)(1+DEF)}$ .

---



### 2.5.2 Transformée en $z$ d'un schéma bloc

La figure 2.6 décrit une partie de schéma bloc en  $p$ , il s'agit alors de transformer ce schéma en un schéma bloc en  $z$ . La tentation est grande de transformer terme à terme, mais c'est faux !

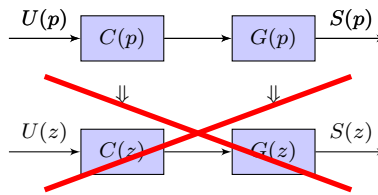


FIGURE 2.6 – Il est impossible de transformer un graphe en  $p$  en un graphe en  $z$  par transformation des différents blocs !

$$\begin{aligned} G_1(p) &\rightarrow G_1(z) \\ G_2(p) &\rightarrow G_2(z) \\ G(p) = G_1(p)G_2(p) &\nrightarrow G(z) = G_1(z)G_2(z) \end{aligned}$$

Pour que cela soit vrai il faut que le signal entre  $G_1$  et  $G_2$  soit un signal échantillonné.

**Exemple :** soit :  $G_1(p) = \frac{1}{p}$  et  $G_2(p) = \frac{1}{p+a}$  alors  $G_1(z) = \frac{z}{z-1}$  et  $G_2(z) = \frac{\tau z}{z-e^{-T_e/\tau}}$   
 et  $\mathcal{Z}[G_1(p)G_2(p)] = \frac{(1-e^{-T_e/\tau})z}{(z-1)(z-e^{-T_e/\tau})} \neq \frac{z}{z-1} \frac{\tau z}{z-e^{-T_e/\tau}}$

### 2.5.3 Transformée d'un système précédé par un bloqueur d'ordre 0

Le bloqueur d'ordre 0 (en anglais "Zero Order Hold") est l'objet physique qui permet de passer d'un signal numérique échantillonné, qui ne contient que de l'information et seulement aux instants d'échantillonnage, à un signal analogique continu par morceaux.

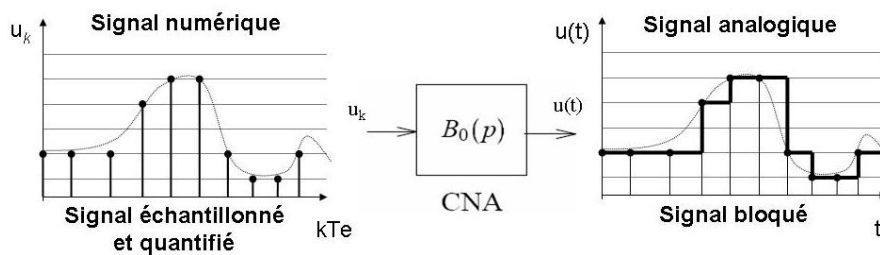


FIGURE 2.7 – Signaux d'entrée et de sortie d'un bloqueur d'ordre 0.

On cherche la transformée en  $z$  du schéma bloc donné en figure 2.8.

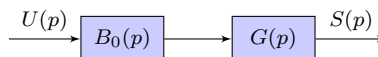


FIGURE 2.8 – Transmittance continue précédée d'un bloqueur d'ordre 0 (en anglais ZOH : Zero Order Hold).

En premier lieu, il nous faut la transmittance en  $p$  du bloqueur d'ordre 0, ensuite nous verrons comment déterminer la transformée en  $z$  de l'ensemble.

#### Fonction de transfert d'un bloqueur d'ordre 0

Rappel : La transformée de Laplace d'un système est la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle. Si l'on soumet un bloqueur d'ordre 0 à une impulsion, on obtient la sortie illustrée en figure 2.9.

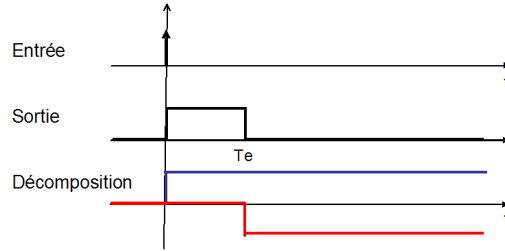


FIGURE 2.9 – Réponse impulsionnelle d'un bloqueur d'ordre 0.

$$\begin{aligned}
 B_0(t) &= \mathcal{H}(t) - \mathcal{H}(t - T_e) \\
 B_0(p) &= \mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(p)e^{-T_e p} \\
 B_0(p) &= \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}
 \end{aligned}$$

### Calcul de la transformée d'un système précédé par un bloqueur d'ordre 0

$$G(z) = \mathcal{Z} [\mathcal{L}^{-1} [B_0(p)G(p)]]$$

Par souci de simplification d'écriture nous écrirons :

$$G(z) = \mathcal{Z} [B_0(p)G(p)]$$

donc

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \mathcal{Z} \left[ \frac{1 - e^{-T_e p}}{p} G(p) \right] \\
 &= \mathcal{Z} \left[ \frac{G(p)}{p} - \frac{e^{-T_e p}}{p} G(p) \right]
 \end{aligned}$$

En appliquant la linéarité de la transformation puis le théorème du retard, on obtient :

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \mathcal{Z} \left[ \frac{G(p)}{p} \right] - \mathcal{Z} \left[ \frac{e^{-T_e p}}{p} G(p) \right] \\
 &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{G(p)}{p} \right]
 \end{aligned}$$

d'où

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \frac{G(p)}{p} \right] \quad (2.15)$$

Une table des transformées usuelles de systèmes précédés d'un bloqueur d'ordre 0 est donnée dans le tableau A.2 en page 97.

---

**Pour aller plus loin :** Vérifier quelques lignes du tableau A.2

---

#### 2.5.4 Transmittances échantillonnées de systèmes bouclés

Le problème posé en figure 2.10 est qu'il n'y a pas d'échantillonneur bloqueur entre la sortie  $s$  et la transmittance  $H(p)$ . Qu'à cela ne tienne, la transmittance en boucle fermée d'un système s'écrit :

$$\text{BoucleFermée} = \frac{\text{chaîne directe}}{1 + \text{chaîne directe} \times \text{chaîne de retour}}$$

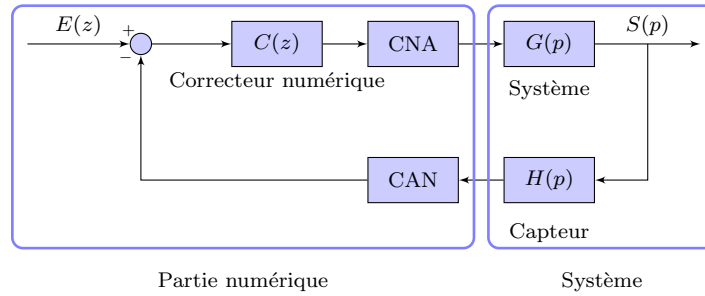


FIGURE 2.10 – Système bouclé échantillonné.

Ici

$$F(z) = \frac{C(z)\mathcal{Z}[B_0(p)G(p)]}{1 + C(z)\mathcal{Z}[B_0(p)G(p)H(p)]}$$

### 2.5.5 Avec Matlab

Matlab ne sait transformer qu'en utilisant une "méthode", ici : faire précéder le système d'un bloqueur d'ordre 0.

```
>> Te=1; % définition de la période d'échantillonnage
>> sys=tf([1],[1 1 0] ) % définition du système continu
>> sysd=c2d(sys,Te, 'zoh'); % transformée en z avec BOZ
>> present(sysd); % présentation du résultat
>> sysc=d2c(sysd,'zoh'); % transformée inverse avec BOZ
>> present(sysc); % présentation du résultat

>> Te=1;
>> sys=tf([1],[1 1 0] )
```

Transfer function:

```
1
-----
s^2 + s
```

```
>> sysd=c2d(sys,Te, 'zoh');
>> present(sysd);
```

Transfer function:

```
0.3679 z + 0.2642
-----
z^2 - 1.368 z + 0.3679
```

Sampling time: 1

```
>> sysc=d2c(sysd,'zoh');
>> present(sysc);
```

Transfer function:

```
-9.84e-016 s + 1
-----
s^2 + s + 1.776e-015
```



# Chapitre 3

## Analyse des systèmes

Avant de faire une correction quelconque il faut analyser le système. Dans ce chapitre nous aborderons le lien entre les pôles en  $p$  et les pôles en  $z$  afin de comprendre comment le système réagit à une entrée de consigne et dans quelle mesure il est possible de transformer cette réaction. Deux points sont fondamentaux, la stabilité du système et sa précision. En effet on cherche toujours à améliorer ces deux points lorsque l'on asservit un système.

Notez que ces analyses sont totalement indépendantes du fait que l'on parle d'un système en boucle ouverte ou en boucle fermée. Hormis l'analyse de la stabilité par le critère de Nyquist (non abordé dans ce cours) qui prédit la stabilité d'un système bouclé par un retour unitaire, l'ensemble des autres points s'appliquent sur une fonction de transfert, celle-ci représentant soit un système en boucle ouverte soit en boucle fermée.

### 3.1 Stabilité

**Définition 1** *Un système est dit stable si, écarté de sa position de repos, celui-ci revient à cette position lorsque la cause qui l'en a écarté cesse.*

**Définition 2** *Un système est dit stable si sa réponse à toute entrée bornée est bornée.*

Note : en appliquant ces définitions l'intégrateur pur n'est pas stable !

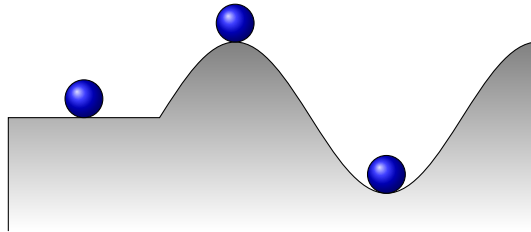


FIGURE 3.1 – Stabilité des systèmes au sens de Lyapounov [12] : illustration de la stabilité d'une bille sur un profil.

#### 3.1.1 Conditions de stabilité

Appliquons la définition 1 sur un système quelconque.

Soit un système donné par sa transformée en  $z$ ,  $G(z)$

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_mz^m}{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n} \text{ avec } m < n$$

ainsi la sortie  $S(z)$  est donnée par :

$$S(z) = \frac{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_mz^m}{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n} E(z)$$

Le système étant initialement en équilibre, soit en 0, si on applique une petite perturbation sur l'entrée, le système doit revenir à sa position d'équilibre, soit 0. En prenant comme perturbation  $e(t) = \delta(t)$ , soit  $E(z) = 1$ , la sortie  $S(z)$  devient :

$$S(z) = \frac{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_mz^m}{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n}$$

Nous avons vu au §2.4.3 que le signal  $S(z)$  se décompose sous la forme :

$$S(z) = \frac{C_1z}{z - z_1} + \frac{C_2z}{z - z_2} + \frac{C_3z}{z - z_3} + \dots + \frac{C_nz}{z - z_n}$$

et par conséquent,  $s(kT_e)$  est de la forme :

$$s(kT_e) = C_1z_1^k + C_2z_2^k + C_3z_3^k + \dots + C_nz_n^k$$

les  $C_i$  et les  $z_i$  étant complexes. En utilisant la forme  $z_i = \rho_i e^{j\theta_i}$

$$\begin{aligned} s(kT_e) &= C_1(\rho_1 e^{j\theta_1})^k + C_2(\rho_2 e^{j\theta_2})^k + C_3(\rho_3 e^{j\theta_3})^k + \dots + C_n(\rho_n e^{j\theta_n})^k \\ s(kT_e) &= C_1\rho_1^k e^{jk\theta_1} + C_2\rho_2^k e^{jk\theta_2} + C_3\rho_3^k e^{jk\theta_3} + \dots + C_n\rho_n^k e^{jk\theta_n} \end{aligned}$$

Pour que le système soit stable, il faut alors que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(kT_e) = 0$$

donc que tous les  $\rho_i$  soit inférieurs à 1, c'est à dire :

$$|z_i| < 1$$

En d'autres termes, pour qu'un système soit stable, il faut et il suffit que les pôles de la fonction de transfert soient tous de module inférieur à 1.

Par abus de langage, nous incluons dans l'ensemble des systèmes stables ceux ayant un ou plusieurs pôles en 1.<sup>1</sup>

Pour connaître la stabilité d'un système il suffit alors de calculer le module des pôles du système. Ce calcul est le plus souvent fastidieux voire impossible. C'est pourquoi, il existe des critères de stabilité ne faisant pas directement le calcul des pôles mais qui permettent de savoir s'ils sont, ou pas, de module inférieur à 1.

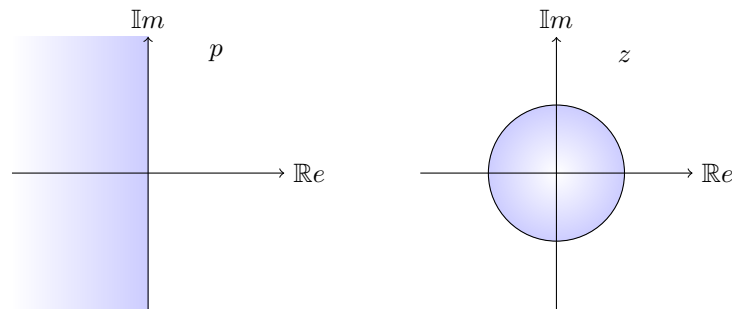


FIGURE 3.2 – Zones où les pôles sont stables en  $p$  et en  $z$ .

1. Ceux-ci sont *marginalelement stables*.

### 3.1.2 Critère de Jury

Soit  $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$  la fonction de transfert d'un système échantillonné.

$$D(z) = a_0^0 + a_1^0 z + a_2^0 z^2 + \dots + a_n^0 z^n$$

On construit la matrice de dimensions  $(n-1) \times (n+1)$  suivante :

$$\begin{bmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots & a_{n-1}^0 & a_n^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{n-1}^1 & 0 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_0^{n-2} & a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

dont les éléments sont définis comme suit :

$$a_k^{j+1} = \begin{cases} \begin{vmatrix} a_0^j & a_{n-j-k}^j \\ a_{n-j}^j & a_k^j \end{vmatrix} & \text{pour } 0 \leq k \leq n-j-1 \\ 0 & \text{pour } k > n-j-1 \end{cases}$$

Le polynôme  $D(z)$  n'a aucun zéro de module supérieur à 1 si les  $n+1$  conditions suivantes sont respectées :

1.  $\sum_{i=0}^n a_i^0 = D(1) > 0$
2.  $(-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^0 = (-1)^n D(-1) > 0$
3.  $|a_0^0| - a_n^0 < 0$
4.  $|a_0^j| - |a_{n-j}^j| > 0$  pour  $j = 1, \dots, n-2$

Note : Si  $D(1) = 0$ , cela veut dire que 1 est racine de  $D(z)$  donc qu'il y a un pôle en 1, le système est au mieux *marginalelement stable*. On factorise alors  $D(z)$  sous la forme  $D(z) = (z-1)D'(z)$  et étudie la stabilité de  $D'(z)$ .

Exemple à l'ordre 3 ( $n=3$ ) :

$$D(z) = a_0^0 + a_1^0 z + a_2^0 z^2 + a_3^0 z^3$$

$$\begin{bmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & a_3^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.  $\sum_{i=0}^3 a_i^0 = D(1) > 0$
2.  $(-1)^3 \sum_{i=0}^3 (-1)^i a_i^0 = (-1)^3 D(-1) > 0$  soit  $D(-1) < 0$
3.  $|a_0^0| - a_3^0 < 0$
4.  $|a_0^1| - |a_2^1| > 0$  soit  $(a_0^0)^2 - (a_3^0)^2 < a_0^0 a_2^0 - a_1^0 a_3^0$

Déterminer les conditions de stabilité du système :

$$H(z) = \frac{2z + 1}{z^3 + 2z^2 + 4z + 7}$$

### 3.1.3 Critère de Routh-Hurwitz appliqué sur la transformée en $w$

**Transformée en  $w$**  La transformée en  $w$  est une transformation homographique qui fait correspondre exactement l'intérieur du cercle unité au demi plan gauche du plan complexe.

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad z = \frac{1+w}{1-w}$$

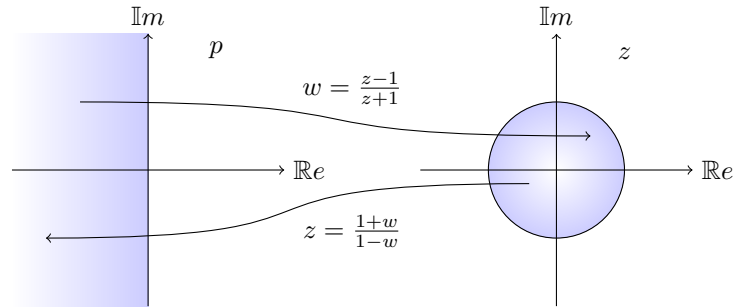


FIGURE 3.3 – Illustration de la transformée homographique  $w$ .

En appliquant la transformée en  $w$  au système, les racines en  $z$  de module inférieur à 1 sont transformées en des racines à partie réelle négative, il suffit alors d'appliquer le critère de Routh-Hurwitz sur la transformée en  $w$  pour connaître le signe des racines du polynôme considéré et donc la stabilité du système.

Déterminer les condition de stabilité du système par l'application du critère de Routh sur la transformée en  $w$  :

$$H(z) = \frac{2z + 1}{z^3 + 2z^2 + 4z + 7}$$

### 3.1.4 Avec Matlab

Ou tout autre logiciel de calcul numérique (Scilab, Octave...<sup>2</sup>)

```
>> P=[1 2 4 7];      % définition du polynôme
>> abs(roots(P))    % calcul du module (abs) des racine (roots) de P
```

Il suffit de regarder si les modules de toutes les racines sont inférieurs à 1.

<sup>2</sup>. Logiciels gratuits!



### 3.2 Correspondance des plans $z$ et $p$

L'objectif est de déterminer le type de comportement du système à la vue des pôles du système tracés dans le plan complexe.

Etudions le lien entre un pôle simple en  $p$  et son transformé par la transformation en  $z$

#### Pôles simples

$$\frac{1}{p+a} \longrightarrow \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

Le pôle en  $-a$  est transformé en un pôle en  $e^{-aT_e}$

L'axe des réels en  $p$  est transformé en l'axe des réels positifs en  $z$ . l'axe des réels négatifs en  $z$  n'a pas de correspondant en  $p$ .

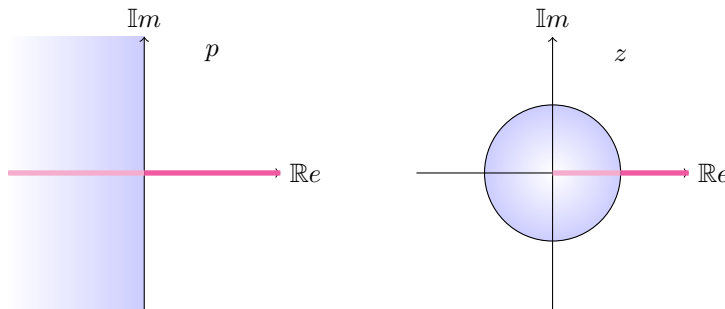


FIGURE 3.4 – Transformation des pôles simples de  $p$  vers  $z$ .

#### Pôles complexes conjugués

$$G(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} \longrightarrow B_0 G(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 - 2(e^{-\xi\omega_k T_e} \cos(\omega_d T_e))z + e^{-2\xi\omega_k T_e}}$$

$$\begin{aligned} p_1, \bar{p}_1 &= -\xi\omega_n \pm i\omega_d \longrightarrow z_1, \bar{z}_1 = e^{-\xi\omega_k T_e} \cos(\omega_d T_e) \pm \sqrt{e^{-2\xi\omega_k T_e} \cos^2(\omega_d T_e) - e^{-2\xi\omega_k T_e}} \\ \text{où } \omega_d &= \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} & &= e^{-\xi\omega_k T_e} (\cos(\omega_d T_e) \pm i \sin(\omega_d T_e)) \\ & & &= e^{-\xi\omega_k T_e} e^{\pm i\omega_d T_e} \end{aligned}$$

(3.1)

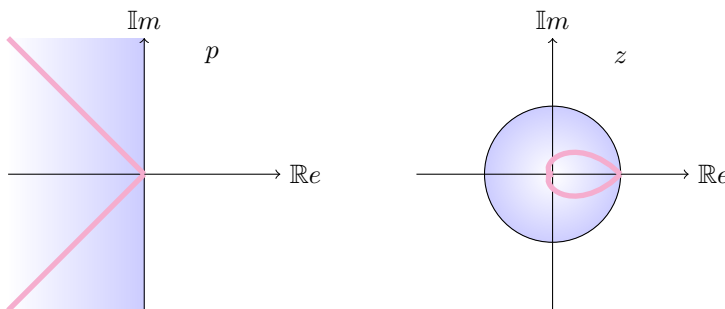


FIGURE 3.5 – Transformation des pôles complexes conjugués de  $p$  vers  $z$ .

**Généralisation** Dans les deux cas nous avons bien la relation :

$$\begin{aligned} \text{Pôle du système continu} &\longrightarrow \text{Pôle du système échantillonné} \\ p_i &\longrightarrow z_i = e^{T_e p_i} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Les figures 3.6 et 3.7 montre cette relation.

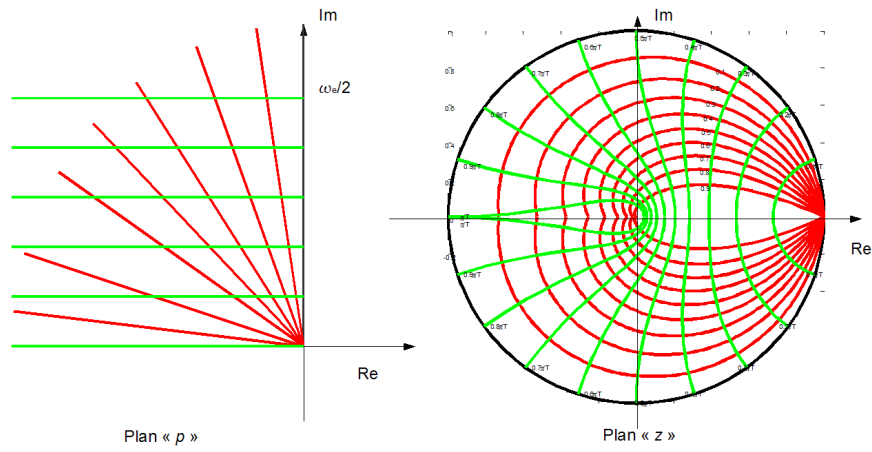


FIGURE 3.6 – Lieu des pôles iso-amortissement.

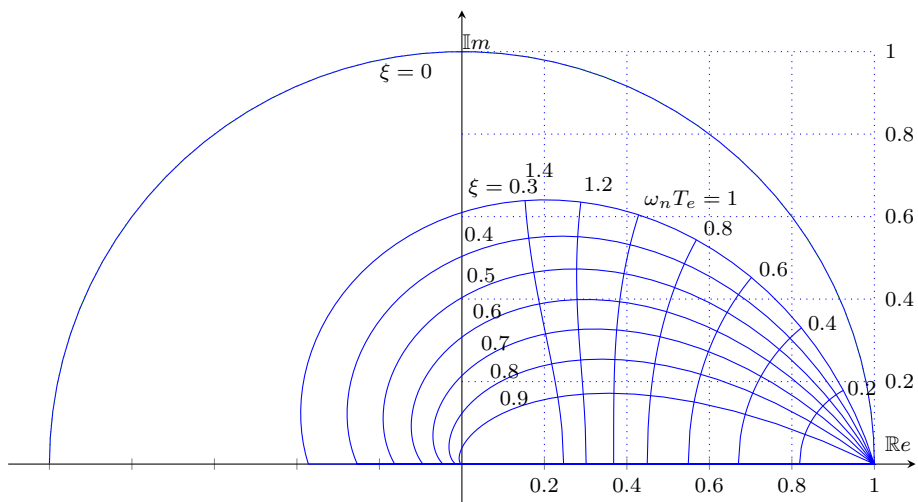


FIGURE 3.7 – Lieu des pôles iso-amortissement.

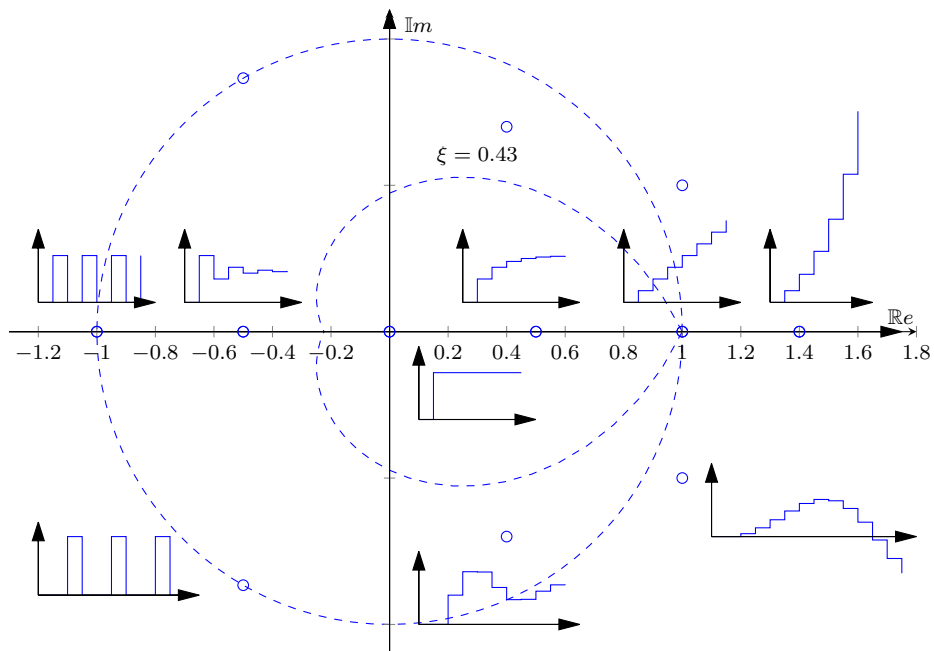


FIGURE 3.8 – Réponses indicielles des pôles en fonction de leur position.

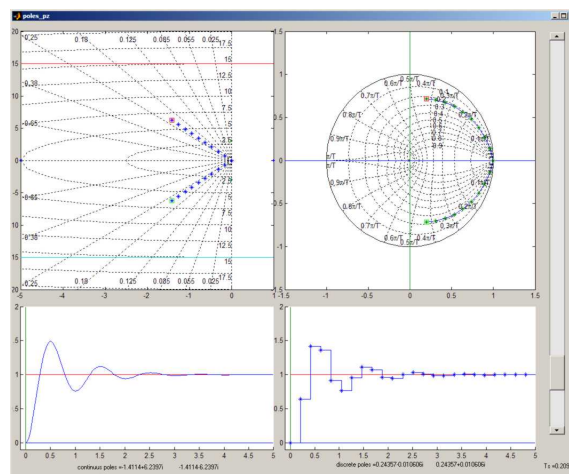


FIGURE 3.9 – Relation entre pôles du système continu et ceux du système échantillonné.

### 3.3 Le lieu d'Evans

#### 3.3.1 Définition

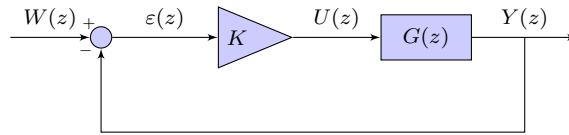


FIGURE 3.10 – Le lieu d'Evans : calcul des pôles du système en boucle fermée par un gain  $K$  .

Le lieu d'Evans est le lieu des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée lorsque le gain  $K$  varie de 0 à l'infini.

Ce lieu est donc un moyen de choisir un gain  $K$  pour obtenir, en boucle fermée, des performances pré-spécifiées. La construction du lieu est assez complexe et fait appel à 8 règles que vous trouverez dans [3]. La synthèse de correcteurs à l'aide de cette méthode est parfaitement possible mais demande un peu d'expérience pour le choix des pôles et des zéros du correcteur. Néanmoins avec une méthode de type "try and error" on arrive à de bons résultats.

#### Exemple de code Matlab

```
>> sysd=zpk([], [0.1 0.9], 1, 1) %période d'échantillonnage = 1s
>> rlocus(sysd);
>> zgrid
```

#### 3.3.2 Exemples

TABLE 3.1 – Exemple 1

$$G(z) = \frac{1}{(z-0.1)(z-0.9)}$$

- lorsque  $k$  est très faible les pôles en B.F. sont proches de ceux en B.O.
- lorsque  $k$  augmente, le système "accélère", les pôles se rapprochent et deviennent complexes conjugués
- lorsque  $k$  dépasse la valeur de 0.9, les pôles ont un module  $> 1$ , le système est instable

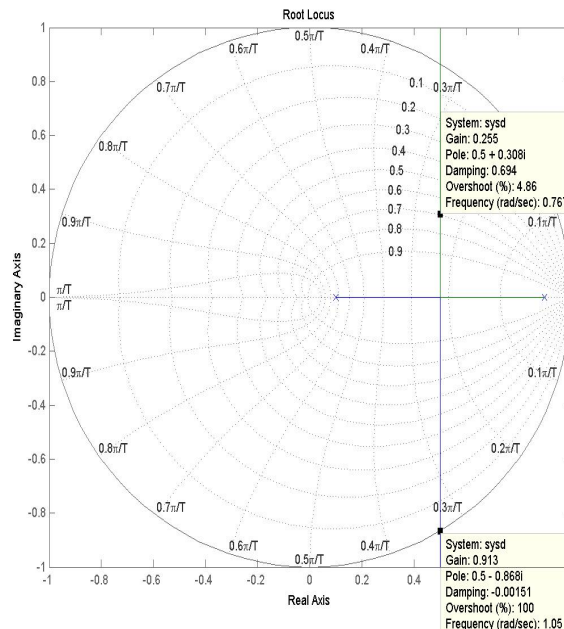


TABLE 3.2 – Exemple 2

$$G(z) = \frac{z-0.5}{(z-0.1)(z-0.9)}$$

- lorsque  $k$  est très faible les pôles en B.F. sont proches de ceux en B.O.
- lorsque  $k$  augmente, le pôle en 0.9 tend vers le zéro en 0.5, l'autre pôle tend vers  $-\infty$
- la limite de stabilité est obtenue pour  $k = 1.39$

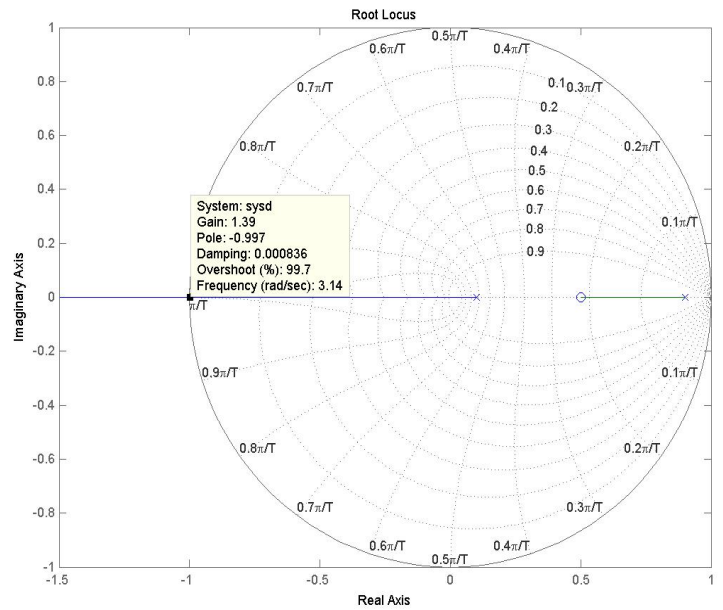


TABLE 3.3 – Exemple 3

$$G(z) = \frac{z+0.5}{(z-0.1)(z-0.9)}$$

- lorsque  $k$  est très faible les pôles en B.F. sont proches de ceux en B.O.
- lorsque  $k$  augmente, les pôles se rapprochent l'un de l'autre, puis deviennent complexes conjugués
- lorsque  $k$  est très grand l'un des pôles tend vers le zéro, l'autre vers  $-\infty$

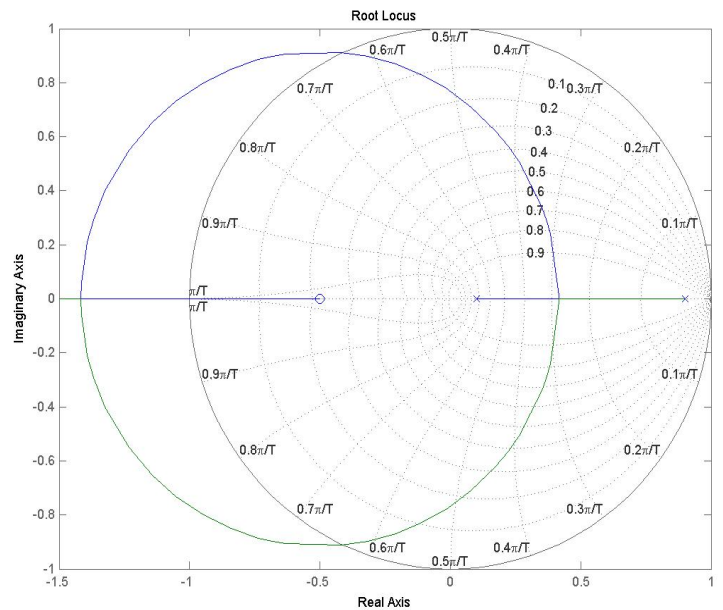


TABLE 3.4 – Exemple 4

$$G(z) = \frac{(z+0.7)(z+0.2)}{(z-0.1)(z-0.9)}$$

- lorsque  $k$  est très faible les pôles en B.F. sont proches de ceux en B.O.
- lorsque  $k$  augmente, les pôles se rapprochent l'un de l'autre, puis deviennent complexes conjugués
- lorsque  $k$  est très grand les pôles en B.F. tendent vers les zéros en B.O..

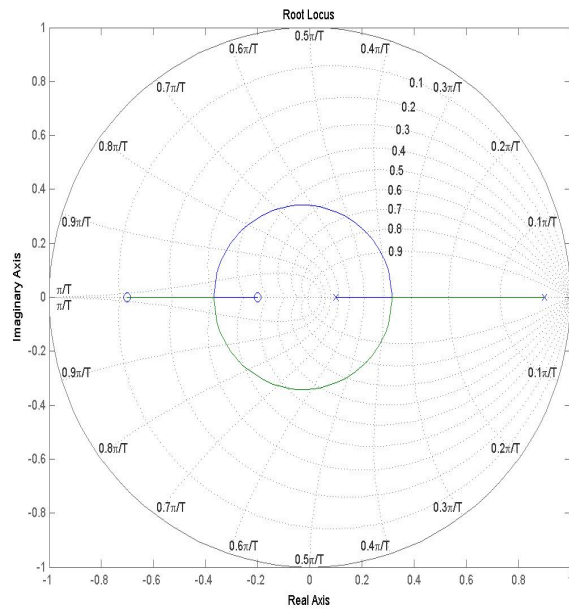
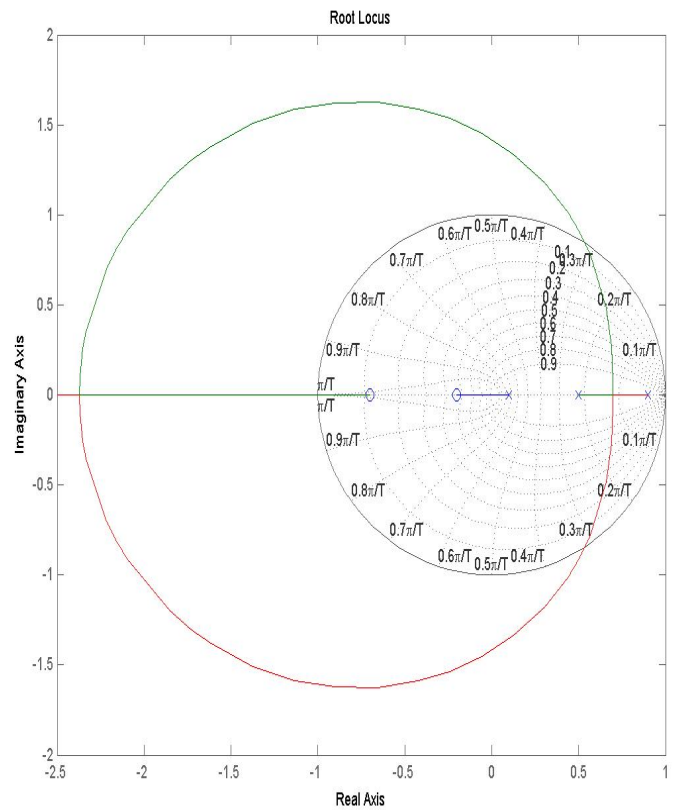


TABLE 3.5 – Exemple 5

$$G(z) = \frac{(z+0.7)(z+0.2)}{(z-0.1)(z-0.5)(z-0.9)}$$

- On retrouve les mêmes tendances que pour les exemples précédents
- les pôles se rapprochent l'un de l'autre avant de devenir complexes conjugués
- lorsque  $k$  est très grand les pôles en B.F. tendent vers les zéros en B.O. ou vers l'infini.



### 3.4 Précision des systèmes échantillonnés

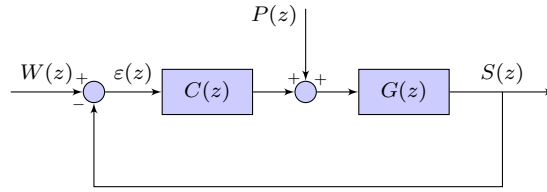


FIGURE 3.11 – Schéma général pour l'étude de la précision des systèmes.

On considère le schéma présenté en figure 3.11. Calculons l'erreur statique du système pour une entrée  $W(z)$  en échelon et une perturbation  $P(z)$  nulle.

#### 3.4.1 Erreur vis-à-vis de la consigne

L'erreur est :

$$\begin{aligned}\varepsilon(z) &= W(z) - S(z) \\ &= W(z) - \varepsilon(z)C(z)G(z) \\ \varepsilon(z)[1 + C(z)G(z)] &= W(z)\end{aligned}$$

$$\varepsilon(z) = \frac{W(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

Calculons maintenant la limite de  $\varepsilon(kT_e)$  lorsque  $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})\varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{W(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

Avec une entrée en échelon unité

$$W(z) = \frac{z}{z-1}$$

on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{z}{z-1} \frac{1}{1 + C(z)G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + C(z)G(z)}$$

l'objectif étant d'avoir une erreur statique nulle, il faut que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = 0$$

et par conséquent que :

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + C(z)G(z)} = 0$$

Supposons maintenant que  $C(z)$  ou  $G(z)$  possède un intégrateur pur. La transmittance en boucle ouverte peut s'écrire :

$$C(z)G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{(z-1)D'(z)}$$

donc

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + C(z)G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \frac{N(z)}{(z-1)D'(z)}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)D'(z)}{(z-1)D'(z) + N(z)} = 0$$

**Conclusion :** pour qu'un système présente une **erreur statique nulle** pour une entrée en échelon, il faut que la transmittance en boucle ouverte présente **au moins un intégrateur pur**.

### 3.4.2 Erreur vis-à-vis de la perturbation

Supposons cette fois que l'entrée  $W(z)$  est nulle et que la perturbation  $P(z)$  est un échelon unité. L'erreur est :

$$\begin{aligned}\varepsilon(z) &= W(z) - S(z) \\ &= 0 - (P(z)G(z) + \varepsilon(z)C(z)G(z)) \\ \varepsilon(z)(1 + C(z)G(z)) &= -P(z)G(z)\end{aligned}$$

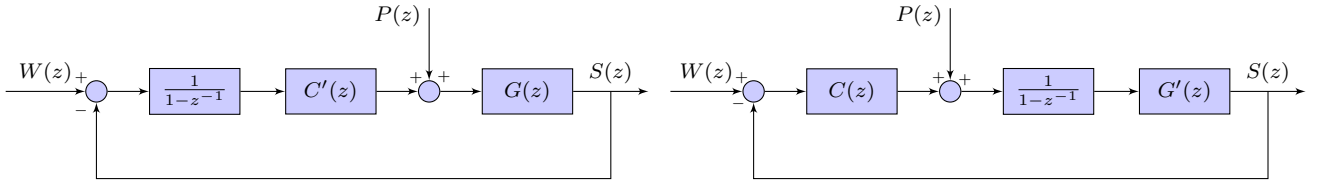
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{z}{z-1} \frac{-G(z)}{1 + C(z)G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

Supposons que le système en boucle ouverte possède un seul intégrateur pur et étudions les deux cas suivants

- Cas 1 : l'intégrateur pur est dans  $C(z) = \frac{N_C(z)}{D_C(z)}$ .
- Cas 2 : l'intégrateur pur est dans  $G(z) = \frac{N_G(z)}{D_G(z)}$ .

Dans les deux cas :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-\frac{N_G(z)}{D_G(z)}}{1 + \frac{N_C(z)}{D_C(z)} \frac{N_G(z)}{D_G(z)}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-N_G(z)D_C(z)}{D_C(z)D_G(z) + N_C(z)N_G(z)}$$



Cas 1 : l'intégrateur pur est dans  $C(z)$ .

$$C(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} C'(z) = \frac{-N_C(z)}{(z-1)D'_C(z)}$$

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) &= \\ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-N_G(z)(z-1)D'_C(z)}{(z-1)D'_C(z)D_G(z) + N_C(z)N_G(z)} &= \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) &= 0\end{aligned}$$

Cas 2 : l'intégrateur pur est dans  $G(z)$ .

$$G(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} G'(z) = \frac{-N_G(z)}{(z-1)D'_G(z)}$$

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) &= \\ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-N_G(z)D_C(z)}{D_C(z)(z-1)D'_G(z) + N_C(z)N_G(z)} &= \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-D_C(z)}{N_C(z)} \neq 0\end{aligned}$$

**Conclusion :** pour qu'un système présente une **erreur statique nulle** pour une perturbation en échelon, il faut au moins **un intégrateur pur en amont de la perturbation**.

### 3.4.3 Extension du raisonnement à tous types d'entrées

Calcul de l'erreur vis-à-vis de la consigne, le système étant soumis à une entrée canonique quelconque de la forme  $w(t) = t^m$  donc :

$$W(z) = \frac{A(z)}{(z-1)^{m+1}}$$

où  $A(z)$  est un polynôme en  $z$  n'ayant pas  $(z-1)$  en facteur.

La transmittance en boucle ouverte peut s'écrire :

$$CG(z) = \frac{N(z)}{(z-1)^n D(z)}$$



L'expression de l'erreur est alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{A(z)}{(z-1)^{m+1}} \frac{1}{1 + CG(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{A(z)}{(z-1)^{m+1}} \frac{1}{1 + \frac{N(z)}{(z-1)^n D(z)}}$$

soit :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{A(z)}{(z-1)^{m+1}} \frac{(z-1)^n D(z)}{(z-1)^n D(z) + N(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z} \frac{(z-1)^n}{(z-1)^m} \frac{A(z)D(z)}{(z-1)^n D(z) + N(z)}$$

**Cas :  $n > m$**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = 0$$

**Cas :  $n = m = 0$**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{A(z)D(z)}{D(z) + N(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{A(1)D(1)}{D(1) + N(1)} = \frac{A(1)}{1 + \frac{N(1)}{D(1)}} = \frac{1}{1 + K}$$

Note 1 :  $K$  est le gain en boucle ouverte (système + correcteur),  $K = \frac{N(1)}{D(1)}$ .

Note 2 : si  $n = m = 0$  alors l'entrée est un échelon unité donc  $A(z) = z$ .

**Cas :  $n = m \geq 1$**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{A(z)D(z)}{(z-1)^n D(z) + N(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{A(z)D(z)}{N(z)} = \frac{A(1)D(1)}{N(1)} = \frac{A(1)}{K} = \frac{T_e}{K}$$

Note 1 :  $K$  est le gain en boucle ouverte (système + correcteur),  $K = \frac{N(1)}{D(1)}$ .

Note 2 :  $A(1) = m!T_e^m$  (voir tables A.1 page 96).

**Cas :  $n < m$**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e) = \infty$$

Les valeurs de  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT_e)$  sont résumées dans le tableau 3.6.

TABLE 3.6 – Erreur permanente en fonction de l'entrée et de la classe du système en l'absence d'entrée de perturbation.<sup>4</sup>

classe du système	échelon	rampe	parabole	...
=				...
nb d'intégrateurs purs	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	...
0	$\frac{1}{1+K}$	$\infty$	$\infty$	...
1	0	$\frac{T_e}{K}$	$\infty$	...
2	0	0	$\frac{2T_e^2}{K}$	...
3	0	0	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

4. Une certaine confusion existe dans la littérature concernant ce tableau. Ici, il est donnée pour des entrées canoniques en temps soit  $\{1, t, t^2, t^3 \dots\}$  qui se traduisent dans le domaine de Laplace par  $\left\{ \frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \frac{2}{p^3}, \frac{6}{p^4} \dots \right\}$  et en  $z$  par  $\left\{ \frac{z}{z-1}, \frac{T_e z}{(z-1)^2}, \frac{T_e^2 z(z+1)}{(z-1)^3}, \frac{T_e^3 z(z^2+1+4z)}{(z-1)^4} \dots \right\}$ .

**Pour aller plus loin :** Quelle est l'erreur permanente du système représenté en figure 3.12 dans les conditions décrites ?

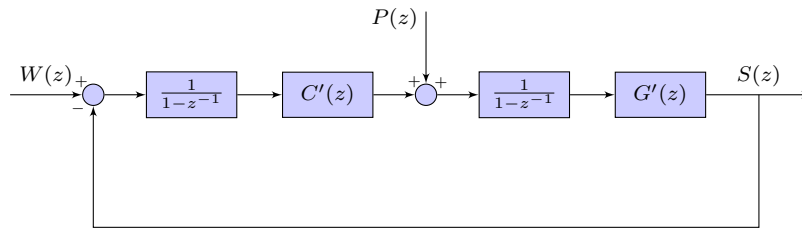


FIGURE 3.12 – Système soumis à une entrée en rampe et une perturbation en échelon.

### 3.4.4 Cycle limite

Les résultats obtenus précédemment ne tiennent pas compte de la quantification du signal. Cette quantification provoque une non linéarité déstabilisante et par conséquent, une petite oscillation autour de la valeur finale comme illustré en figure 3.13. La précision est alors fonction du pas de quantification.

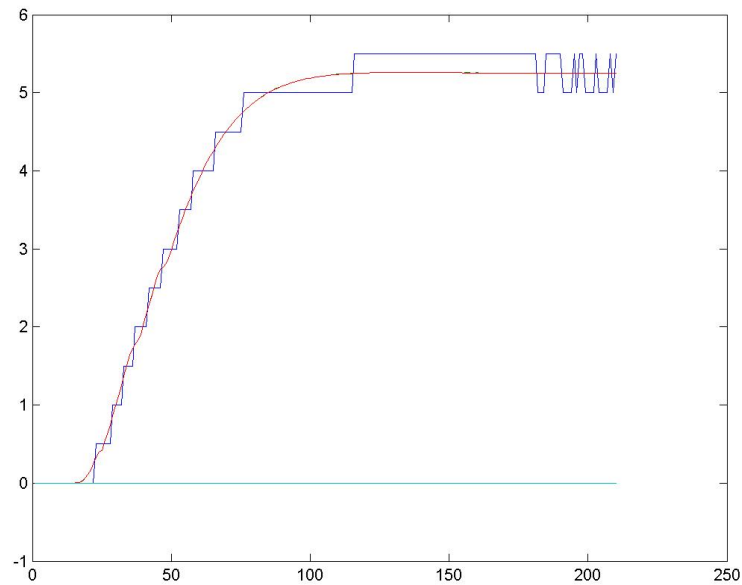


FIGURE 3.13 – Cycle limite dû à la quantification du signal.

Dans le cas de systèmes instables en boucle ouverte, le cycle limite, véritable oscillation entretenue est inévitable. Par contre l'amplitude de cette oscillation est contrôlable par le choix du pas de quantification.

# Chapitre 4

## Transposition des correcteurs analogiques

Il est, *a priori*, dommage de synthétiser un correcteur analogique puis de le convertir en correcteur numérique. Les méthodes de synthèses numériques abondent et donnent de meilleurs résultats en termes de performances (robustesse, précision, rejet de perturbation). Néanmoins dans le cas où le correcteur analogique est déjà synthétisé et qu'il ne s'agit que de le transposer en numérique, la transformée bilinéaire donnée ci-après se révèle fort utile<sup>1</sup>.

Par ailleurs, cette méthode de synthèse de correcteurs numériques couplée à une méthode de synthèse type Ziegler-Nichols permet de synthétiser en quelques minutes un correcteur pour un système dont on ignore tout ou presque et qui plus est, pratiquement sans comprendre l'automatique !

### 4.1 Les différentes approximations de la dérivée

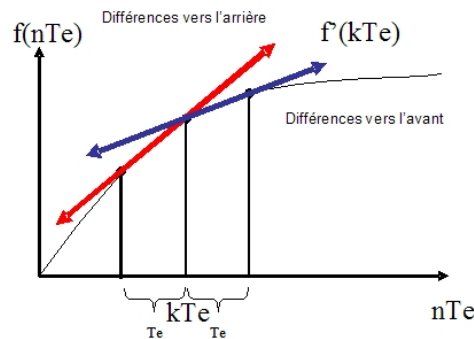


FIGURE 4.1 – Principe de calcul de la dérivée par différences finies : différences vers l'avant et vers l'arrière.

En introduisant l'opérateur retard  $q$ .

#### 4.1.1 Différences vers l'arrière

$$\frac{dx}{dt} \simeq \frac{x(t) - x(t - T_e)}{T_e} = \frac{1 - q^{-1}}{T_e} x(t) = \frac{q - 1}{qT_e} x(t)$$

$$\text{Dérivation : } p \longrightarrow \frac{z - 1}{zT_e} \qquad \text{Intégration : } \frac{1}{p} \longrightarrow \frac{T_e z}{z - 1}$$

Cela correspond à l'approximation :

$$z = e^{T_e p} \simeq \frac{1}{1 - T_e p} \implies p \simeq \frac{z - 1}{zT_e}$$

1. La synthèse de correcteur analogiques sort du cadre de ce cours, reportez vous au poly d'automatique linéaire continue de B. Lang

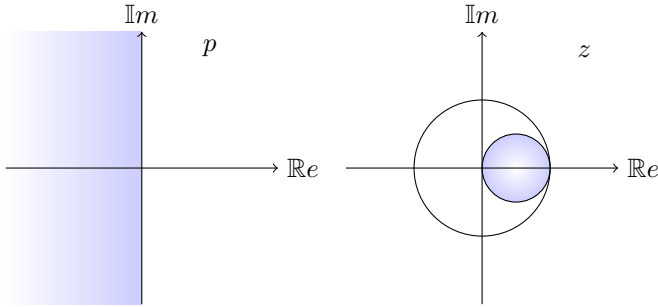


FIGURE 4.2 – Transformée du domaine de stabilité en  $p$ . Un système continu instable peut être transformé en un système discret stable.

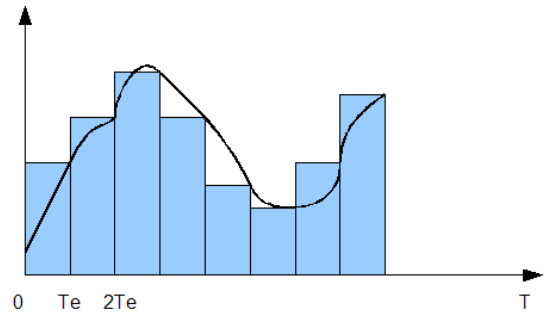


FIGURE 4.3 – Méthode des rectangles : approximation par excès.

Calcul numérique de l'intégrale :

$$I = \int_0^t x(\tau) d\tau \simeq \sum_{k=1}^n x(kT_e)T_e \quad i_n = i_{n-1} + T_e x_n$$

### 4.1.2 Différences vers l'avant

$$\frac{dx}{dt} \simeq \frac{x(t + T_e) - x(t)}{T_e} = \frac{q - 1}{T_e} x(t)$$

Dérivation :  $p \longrightarrow \frac{z - 1}{T_e}$

Intégration :  $\frac{1}{p} \longrightarrow \frac{T_e}{z - 1}$

Cela correspond à l'approximation :

$$z = e^{T_e p} \simeq 1 + T_e p \implies p \simeq \frac{z - 1}{T_e}$$

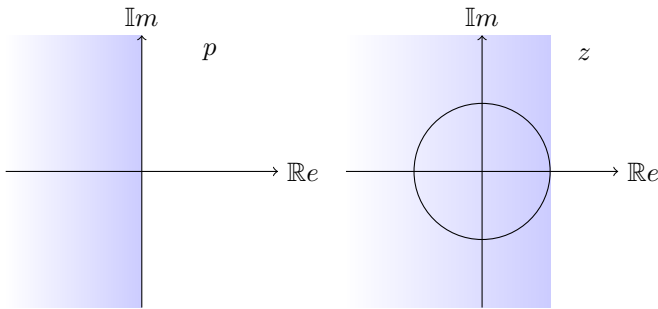


FIGURE 4.4 – Transformée du domaine de stabilité en  $p$ . Un système continu stable peut être transformé en un système discret instable.

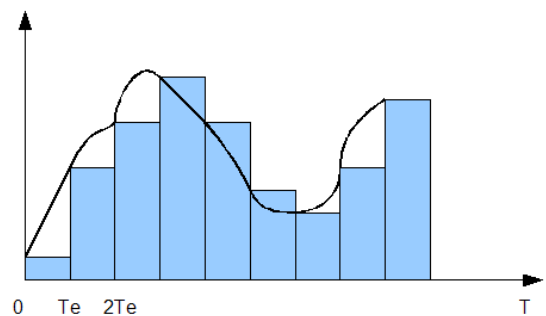


FIGURE 4.5 – Méthode des rectangles : approximation par défaut.

Calcul numérique de l'intégrale :

$$I = \int_0^t x(\tau) d\tau \simeq \sum_{k=0}^{n-1} x(kT_e)T_e \quad i_n = i_{n-1} + T_e x_{n-1}$$

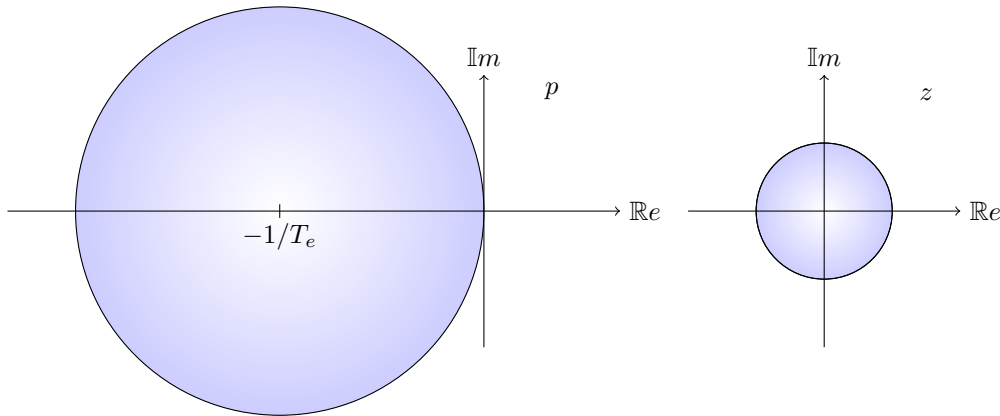


FIGURE 4.6 – Transformée du domaine de stabilité en  $z$ . La zone des pôles en  $p$  donnant un pôle stable en  $z$  est un cercle de rayon  $1/T_e$  centré en  $-1/T_e$ .

### 4.1.3 Transformation bilinéaire

La dérivée numérique est proche de la moyenne des dérivées au point considéré et au point précédent.

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{d x(t+T_e)}{dt} + \frac{d x(t)}{dt} \right] \simeq \frac{x(t+T_e) - x(t)}{T_e} \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \left[ \frac{q+1}{2} \right] \simeq \frac{q-1}{T_e} x(t)$$

$$\frac{dx}{dt} \simeq \frac{2}{T_e} \frac{q-1}{q+1} x(t)$$

Dérivation :  $p \longrightarrow \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}$       Intégration :  $\frac{1}{p} \longrightarrow \frac{T_e}{2} \frac{z+1}{z-1}$

Cela correspond à l'approximation :

$$z = e^{T_e p} \simeq \frac{e^{\frac{T_e p}{2}}}{e^{-\frac{T_e p}{2}}} \simeq \frac{1 + \frac{T_e p}{2}}{1 - \frac{T_e p}{2}} \simeq \frac{2 + T_e p}{2 - T_e p}$$

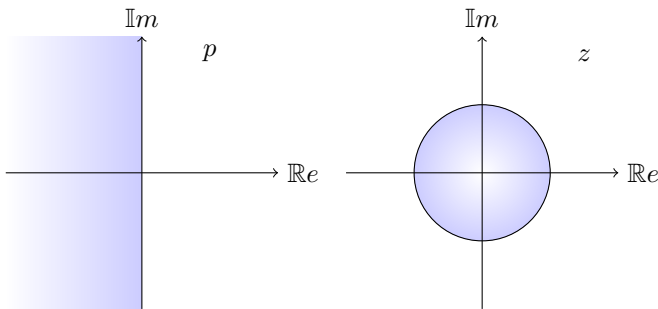


FIGURE 4.7 – Transformée du domaine de stabilité en  $p$ . Les deux régions se correspondent rigoureusement.

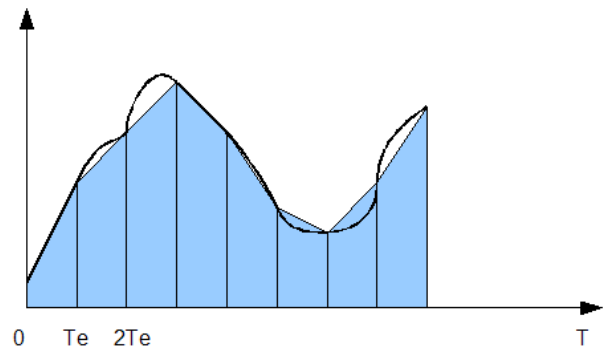


FIGURE 4.8 – Méthode des trapèzes.

Calcul numérique de l'intégrale :

$$I = \int_0^t x(\tau) d\tau \simeq \sum_{k=1}^n \frac{x((k-1)T_e) + x(kT_e)}{2} T_e \quad i_n = i_{n-1} + \frac{T_e}{2} (x_{n-1} + x_n)$$

Remarque : La transformation bilinéaire introduit une distorsion des fréquences. Cette distorsion peut être compensée à une pulsation donnée  $\omega_1$  par l'utilisation de

Dérivation :  $p \longrightarrow \frac{\omega_1}{\tan(\omega_1 T_e / 2)} \frac{z-1}{z+1}$

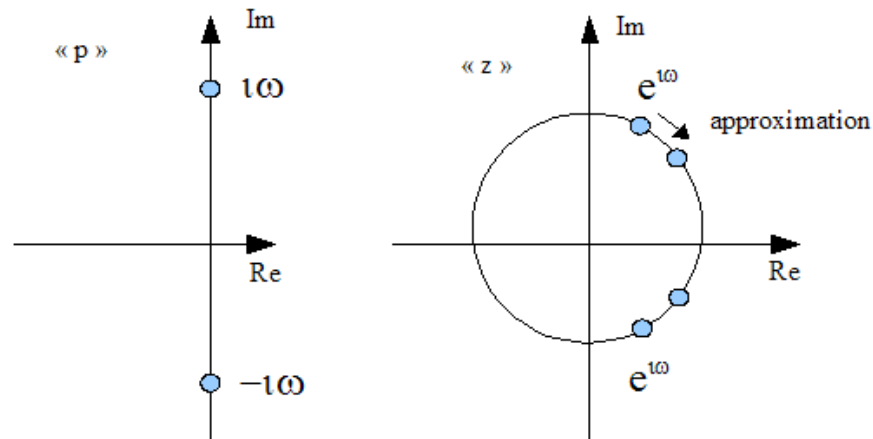


FIGURE 4.9 – Phénomène de distorsion de la transformation bilinéaire.

#### 4.1.4 Avec Matlab

Seule la transformée bilinéaire est directement implantée, les différences avant et arrière ne le sont pas !

```
>> Te=1;
>> sys=tf([1],[1 1 1]) % définition du système continu
>> sysd=c2d(sys,Te, 'tustin'); % transformée en z par transformée bilinéaire
>> present(sysd); % présentation du résultat
>> sysdp=c2d(sys,Te, 'prewarp', 2); % transformée bilinéaire avec précompensée (f1=2rad/s)
>> present(sysdp); % présentation du résultat
>> sysdb=c2d(sys,Te, 'zoh'); % transformée avec BOZ
>> present(sysdb); % présentation du résultat
>> W=logspace(-1, 0.5, 200);
>> bode(sys,'r',sysd,'y--',sysdp,'gx',sysdb,'k.', W);
```

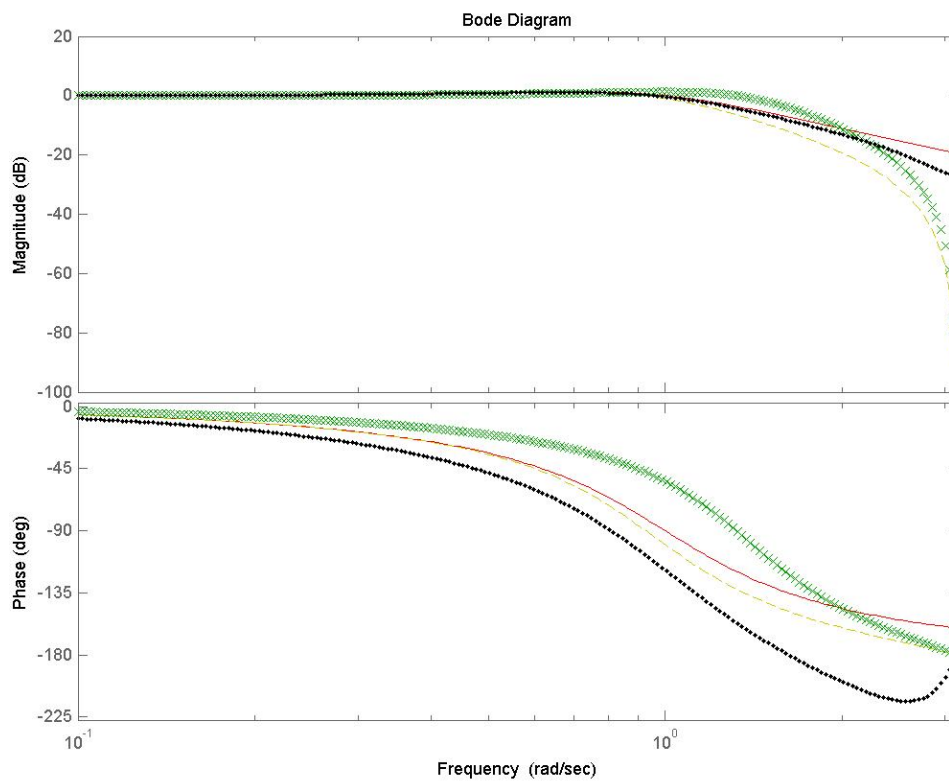


FIGURE 4.10 – Comparaison des transformées en  $z$  d'un point de vue fréquentiel.

—— Système original analogique

..... Transformée avec BOZ

- - - Transformée bilinéaire

+ + + Transformée bilinéaire avec précompensation (en  $f = 2$  rad/s.)

## 4.2 PID analogique

Tous les correcteurs analogiques sont transformables en correcteurs numériques, le plus connu d'entre eux étant le PID. De nombreuses méthodes permettent de calculer les coefficients du correcteur PID à partir d'un modèle du système. Cependant, dans la plupart des cas, un tel modèle n'existe pas. On procède alors des choix de paramètres calculés à partir d'essais effectués sur le système.

### 4.2.1 Réglages de Ziegler-Nichols

Le correcteur PID s'écrit :

$$C(p) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) = k_p + \frac{k_i}{p} + k_d p$$

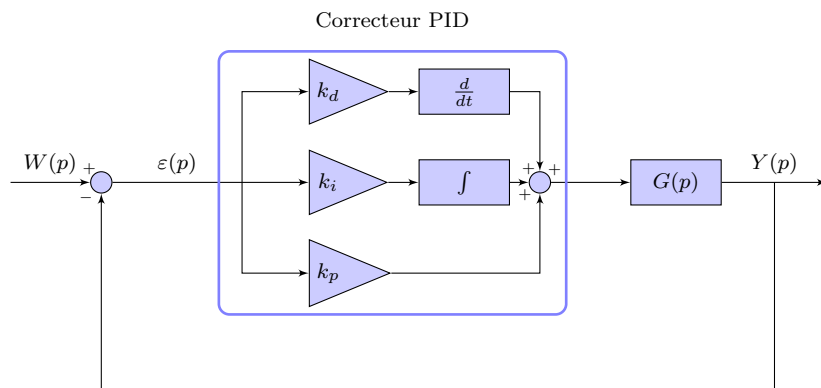


FIGURE 4.11 – Schéma d'un correcteur PID.

Il faut ensuite transformer le correcteur analogique  $C(p)$  en un correcteur numérique par l'une des méthodes de transformation vues précédemment (§4.1 ou §2.5.3).

La transformée bilinéaire est la plus utilisée et donne de bons résultats à condition de choisir une période d'échantillonnage proche du "quasi-continu", c'est-à-dire les limites basses des valeurs communément admises (voir fig. 1.28).

Le tableau 4.1 n'est qu'un bref aperçu de l'ensemble des réglages développés par divers auteurs et qui s'adaptent à une majorité de systèmes. Pour des systèmes plus particuliers ou des réglages plus fins tenant compte des caractéristiques de votre système, voyez les références [13] ou [14] qui proposent plus de 200 réglages !

1. Si le système a un comportement de type intégrateur pur.



TABLE 4.1 – Coefficients d’un PID réglé par les méthodes de Ziegler-Nichols et Chien-Hrones-Reswick : essai indiciel et méthode du pompage.

	Méthode de pompage Boucle fermée	Méthodes aperiodiques Boucle ouverte		
	Systèmes stables ou instables en boucle ouverte	Systèmes stables, instables ou integrateurs		
	Ziegler-Nichols	Ziegler-Nichols	Chien-Hrones-Reswick	
	Régulation ou Poursuite	Régulation ou Poursuite	Régulation	Poursuite
P	$K = 0.5K_{osc}$	$K = \frac{1}{a\tau}$	$K = 0.3 \frac{1}{a\tau}$	$K = 0.3 \frac{1}{a\tau}$
P.I	$K = 0.45K_{osc}$ $T_i = 0.83T_{osc}$	$K = 0.9 \frac{1}{a\tau}$ $T_i = 3.3\tau$	$K = 0.6 \frac{1}{a\tau}$ $T_i = 4\tau$	$K = 0.35 \frac{1}{a\tau}$ $T_i = 1.2T$ ou $10\tau^{-1}$
P.I.D	$K = 0.6K_{osc}$ $T_i = 0.5T_{osc}$ $T_d = 0.125T_{osc}$	$K = 1.2 \frac{1}{a\tau}$ $T_i = 2\tau$ $T_d = 0.5\tau$	$K = 0.95 \frac{1}{a\tau}$ $T_i = 2.4\tau$ $T_d = 0.42\tau$	$K = 0.6 \frac{1}{a\tau}$ $T_i = T$ ou $6\tau^{-1}$ $T_d = 0.5\tau$

### 4.2.2 P, PI, ou PID ?

Le choix est toujours un peu ambigu. Le principe de choix communément admis, qui s’applique d’ailleurs à tous les choix de régulateur et correcteurs, est le principe du minimum : si un correcteur P donne les résultats escomptés, on ne met pas un PI, moins encore un PID ! Les tableaux 4.2 et 4.3 donnent un critère de choix en fonction de la réponse temporelle du système à un échelon d’entrée.

Notez la proposition de correcteur de type ”tout ou rien”, qui fonctionne bien dans les cas où la précision requise est faible ou que le système supporte bien les fortes variations de commande. Si le système est en limite de réglabilité par un PID, il faudra alors revoir la conception de la commande soit par des boucles imbriquées, soit synthétiser un correcteur numérique fondé sur d’autres approches.

Dernier point, mais non le moindre, sachez que les réglages de PID proposés, Ziegler-Nichols (voir page 56) ou Takahashi (voir page 60) sont avant tout des réglages de **régulation** et non pas d’**asservissement**. En d’autres termes, ces réglages sont choisis lorsque l’objectif principal est d’asservir une grandeur à une consigne constante et d’être insensible aux perturbations.

1. voir §4.4.2 page 62

TABLE 4.2 – choix d'une méthode de correction en fonction de l'indice de réglabilité

Réglabilité $T/\tau$	$> 20$	10 à 20	5 à 10	2 à 5	$< 2$
Régulateur	Tout ou rien	P	PI	PID	limite du PID <sup>1</sup>

TABLE 4.3 – choix d'une méthode de correction en fonction de l'indice de réglabilité : cas des systèmes instables

Réglabilité $a\tau$	$0.05 < a\tau$	$0.05 < a\tau < 0.1$	$0.1 < a\tau < 0.2$	$0.2 < a\tau < 0.5$	$a\tau > 0.5$
Régulateur	Tout ou rien	P	PI	PID	limite du PID <sup>1</sup>

### 4.3 Le PID numérique

En continu, la sortie d'un PID s'écrit :

$$u(t) = k_p \left( \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon}{dt} \right)$$

L'équivalent en numérique s'écrit alors :

$$u_k = k_p \left( \varepsilon_k + \frac{T_e}{T_i} \sum_{j=0}^k \varepsilon_j + T_d \frac{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})}{T_e} \right)$$

$$u_{k+1} - u_k = k_p \left( \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k + \frac{T_e}{T_i} \varepsilon_{k+1} + T_d \frac{(\varepsilon_{k+1} - 2\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1})}{T_e} \right)$$

$$(z-1)U(z) = k_p \left( z - 1 + \frac{T_e}{T_i} z + T_d \frac{(z-2+z^{-1})}{T_e} \right) \varepsilon(z)$$

d'où la transmittance du PID numérique

$$\frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = k_p + k_i T_e \frac{z}{z-1} + \frac{k_d}{T_e} \frac{z-1}{z}$$

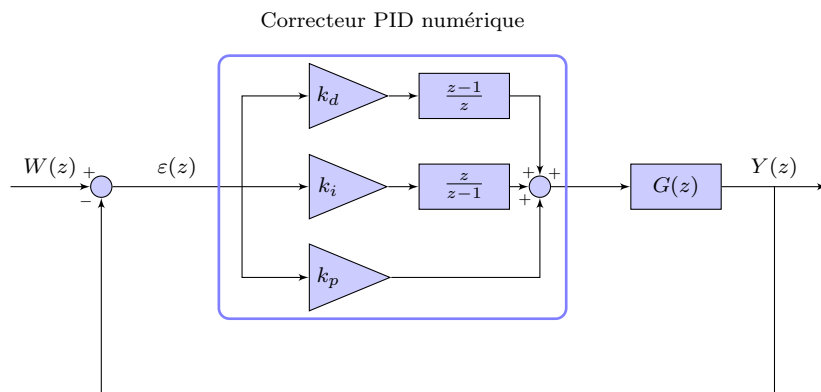


FIGURE 4.12 – Schéma d'un correcteur PID numérique pédagogique.

Ce correcteur reste "pédagogique", dans une application industrielle on préférera les formes suivantes :

### Applications industrielles des correcteurs PID

1. L'action dérivée idéale provoque une forte augmentation du bruit hautes fréquences, on utilise en pratique une dérivée filtrée. Ceci conduit en discret au régulateur PID filtré :

$$\frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = k_p + k_i T_e \frac{z}{z-1} + \frac{k_d}{T_e} \frac{z-1}{z-\alpha}$$

Le choix de  $\alpha$  est classiquement de 0.1

2. Lors d'un changement de consigne de type échelon, la dérivée du signal d'erreur entre la consigne et la sortie est très grande (pratiquement une dérivée d'échelon soit un Dirac). La commande PID sur l'écart va engendrer une commande proportionnelle à la variation de l'erreur via le module dérivateur. L'amplitude de cette commande risque d'être inadmissible en pratique. Une solution pour limiter ce phénomène est d'appliquer l'action dérivée seulement sur la sortie du procédé d'où le PID avec la dérivée sur la mesure seule :

$$U(z) = k_p \varepsilon(z) + k_i T_e \frac{z}{z-1} \varepsilon(z) - \frac{k_d}{T_e} \frac{z-1}{z-\alpha} Y(z)$$

3. Même remarque que précédemment mais cette fois sur la partie proportionnelle d'où le PID avec l'action proportionnelle et dérivée sur la mesure seule :

$$U(z) = k_i T_e \frac{z}{z-1} \varepsilon(z) - \left[ k_p + \frac{k_d}{T_e} \frac{z-1}{z-\alpha} \right] Y(z)$$

Cette dernière solution est bien entendu la meilleure.

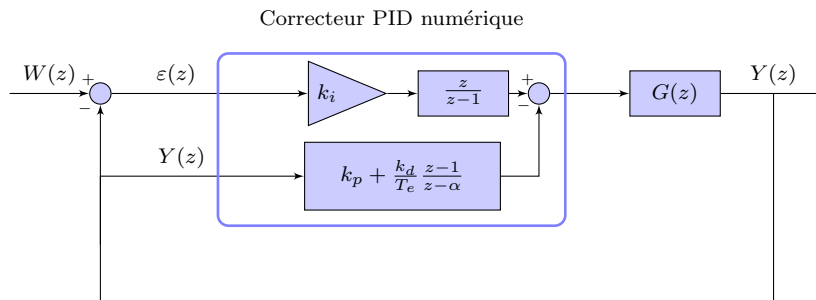


FIGURE 4.13 – Schéma d'un correcteur PID numérique industriel.

### 4.3.1 Réglages de Takahashi pour un régulateur PID numérique filtré

La forme du PID utilisé est :

$$U(z) = k_i T_e \frac{z}{z-1} \varepsilon(z) - \left[ k_p + \frac{k_d}{T_e} \frac{z-1}{z} \right] Y(z) \quad \text{PI ou PID}$$

$$U(z) = k_p \varepsilon(z) \quad \text{P}$$

dont les équations récurrentes sont :

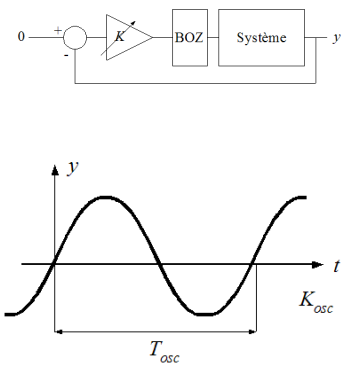
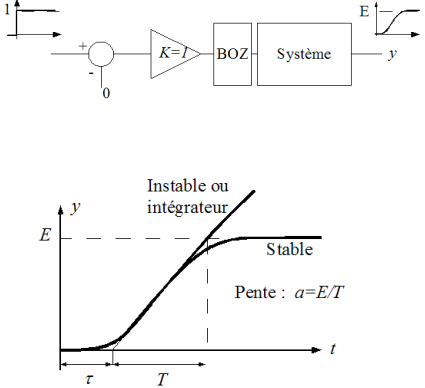
$$u_k = u_{k-1} + k_i T_e (y_k^c - y_k) - k_p (y_{k-1} - y_k) - \frac{k_d}{T_e} (y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}) \quad \text{PI ou PID}$$

$$u_k = k_p (y_k^c - y_k) \quad \text{P}$$

Comme pour la méthode de Ziegler-Nichols, il faut alors soumettre le système à l'un des deux essais :

- un essai indiciel qui donne les valeurs de  $\tau$  et  $a$ ,
- un essai en boucle fermée avec un gain  $K$  : on augmente  $K$  jusqu'à  $K_{osc}$  valeur du gain pour laquelle on obtient une oscillation entretenue de période  $T_{osc}$ .

TABLE 4.4 – Réglages de Takahashi pour un régulateur PID numérique filtré.

	Méthode de pompage Boucle fermée	Méthodes apériodiques Boucle ouverte
	Systèmes stables ou instables en boucle ouverte	Systèmes stables, instables ou intégrateurs
		
P	$k_p = 0.5K_{osc}$	$k_p = \frac{1}{a(\tau+T_e)}$
P.I	$k_p = 0.45K_{osc} - 0.5k_i T_e$ $k_i = 0.54 \frac{K_{osc}}{T_{osc}}$	$k_p = \frac{0.9}{a(\tau+0.5T_e)} - 0.5k_i T_e$ $k_i = \frac{0.27}{a(\tau+0.5T_e)^2}$
P.I.D	$k_p = 0.6K_{osc} - 0.5k_i T_e$ $k_i = 1.2 \frac{K_{osc}}{T_{osc}}$ $k_d = \frac{3}{40} K_{osc} T_{osc}$	$k_p = \frac{1.2}{a(\tau+T_e)} - 0.5k_i T_e$ $k_i = \frac{0.6}{a(\tau+0.5T_e)^2}$ $k_d = \frac{0.5}{a}$

Ces réglages sont en fait les coefficients qui minimisent l'erreur  $\sum_{k \geq 0} |\varepsilon_k|$

## 4.4 Mise en œuvre d'un asservissement

### 4.4.1 Anti-windup

Après application du correcteur précédent, la première imperfection qui apparaît est due aux non linéarités du système et en particulier les saturations de l'organe de commande (amplificateur, vanne, ...).

En particulier lorsque l'erreur est importante (démarrage par exemple), l'intégrateur intègre une erreur grande et donc sa sortie est très grande. Lorsque le système arrive à la valeur de consigne, l'intégrateur est encore "plein" et donc le système dépasse largement cette valeur de consigne.

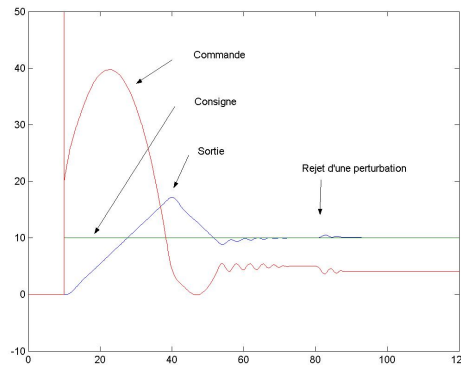
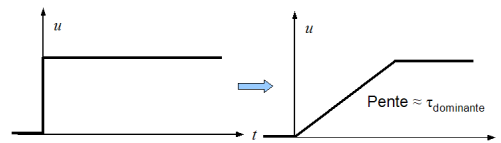


FIGURE 4.14 – Effet de l'absence de saturation sur le terme intégral.

Pour éviter ce phénomène deux méthodes sont de loin les plus utilisées, souvent simultanément :

- la mise en place d'un générateur de trajectoire (ex : bras de robot), afin que le système ne quitte pas son domaine de linéarité.



- la mise en place d'un anti-windup qui limite la valeur stockée dans l'intégrateur par au maximum de commande admissible par le système.

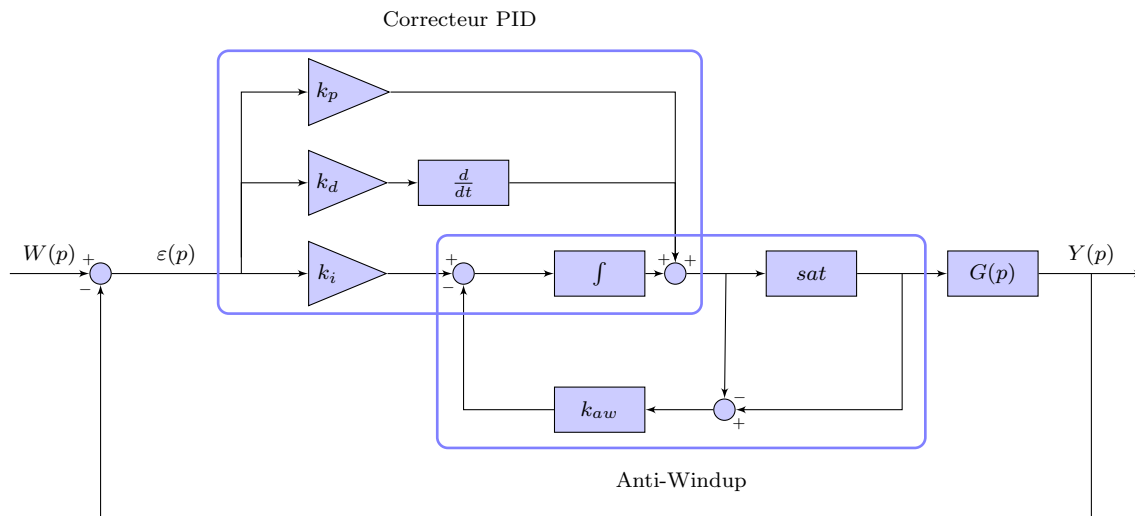


FIGURE 4.15 – PID classique avec anti-windup.

### 4.4.2 Prédicteur de Smith

Dans le cas de systèmes très retardés, ce qui arrive souvent dans les applications industrielles, les méthodes précédentes ne fonctionnent pas bien. En fait un réglage classique de PID conduit à un système plus lent en boucle fermée qu'en boucle ouverte si le retard pur dépasse la moitié de la constante de temps dominante.

Soit  $G(z)$  un système très retardé de la forme.

$$G(z) = G_1(z)z^{-n}$$

Le principe de synthèse est le suivant : on synthétise un correcteur  $C_1(z)$  pour le système non retardé  $G_1(z)$  puis on adapte ce correcteur pour le système réel  $G(z)$ .

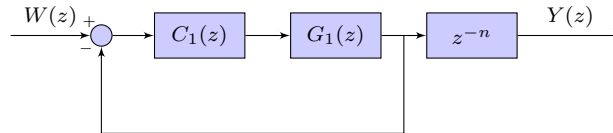


FIGURE 4.16 – Schéma idéal de correction de systèmes très retardés. Utopique car le retard pur n'est pas dissociable du reste de la transmittance du système.

Bien que totalement irréalisable en l'état car le retard pur n'est pas dissociable du reste de la transmittance du système, calculons tout de même la fonction de transfert du système présenté en figure 4.16.

$$F(z) = \frac{C_1(z) G_1(z)}{1 + C_1(z) G_1(z)} z^{-n}$$

En introduisant la transmittance  $G(z)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{C_1(z) G(z)}{1 + C_1(z) G_1(z) - C_1(z)G(z) + C_1(z)G(z)} \\ F(z) &= \frac{C_1(z) G(z)}{1 + C_1(z) G_1(z)(1 - z^{-n}) + C_1(z)G(z)} \\ F(z) &= \frac{\frac{C_1(z)}{1+(1-z^{-n})G_1(z)C_1(z)} G(z)}{1 + \frac{C_1(z)}{1+(1-z^{-n})G_1(z)C_1(z)} G(z)} \end{aligned}$$

qui est de la forme :

$$F(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

En posant :

$$C(z) = \frac{C_1(z)}{1 + (1 - z^{-n})G_1(z)C_1(z)}$$

$C(z)$  est un correcteur est parfaitement réalisable : voir schéma 4.17.

**Exemple de calcul de la boucle de retour du prédicteur de Smith avec Matlab** Le système à asservir présente un retard pur de 2 secondes :

$$G(p) = \frac{1}{p^3 + 4p^2 + 3p} e^{-2p}$$

```
>> sysc=tf([1],[1 4 3 0]);           % saisie de la fonction de transfert en p
>> sysd=c2d(sysc, 0.1, 'zoh');       % transformée en z avec un BOZ et Te = 0.1
% retour = produit de la transformée du système sans retard par (1-z^-n)
>> retour=sysd*(1-tf(1,1,0.1,'Outputdelay',20));
>> [nu, de]=tfdata(retour,'v')      % récupération du numérateur et du dénominateur
```

Note : la mise en œuvre d'un prédicteur de Smith implique de posséder un très bon modèle du système. Les systèmes présentant des variations de paramètres ne peuvent pas être corrigés par ce type de correcteur.

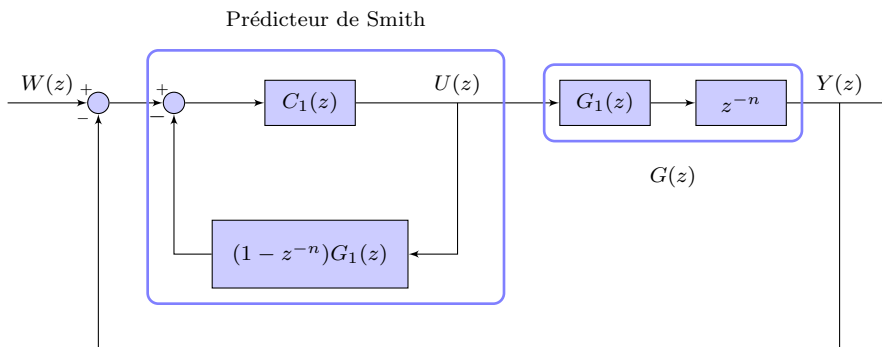


FIGURE 4.17 – Schéma d'un prédicteur de Smith.

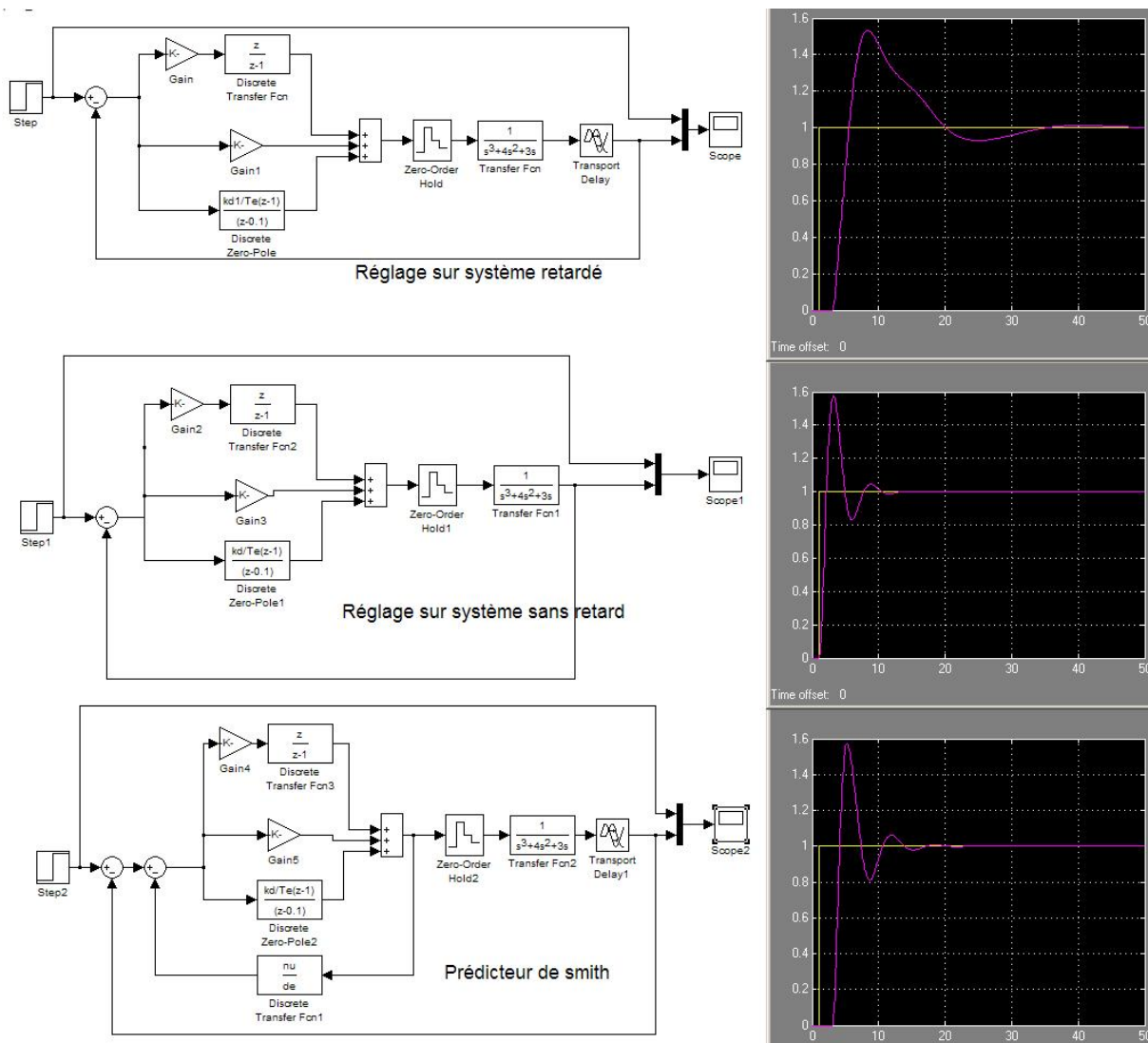


FIGURE 4.18 – Performances d'un prédicteur de Smith.

### 4.4.3 Algorithme

Le cadencement d'une routine d'asservissement est donné en figure 4.19. Lors de la réalisation du logiciel de commande, deux points sont importants :

- La minimisation du temps entre échantillonnage des capteurs et sortie des commandes. En effet, toute la théorie de la commande échantillonnée suppose que ce temps est nul !
- La minimisation des variations de période d'échantillonnage. Là encore,  $T_e$  est supposé constant.

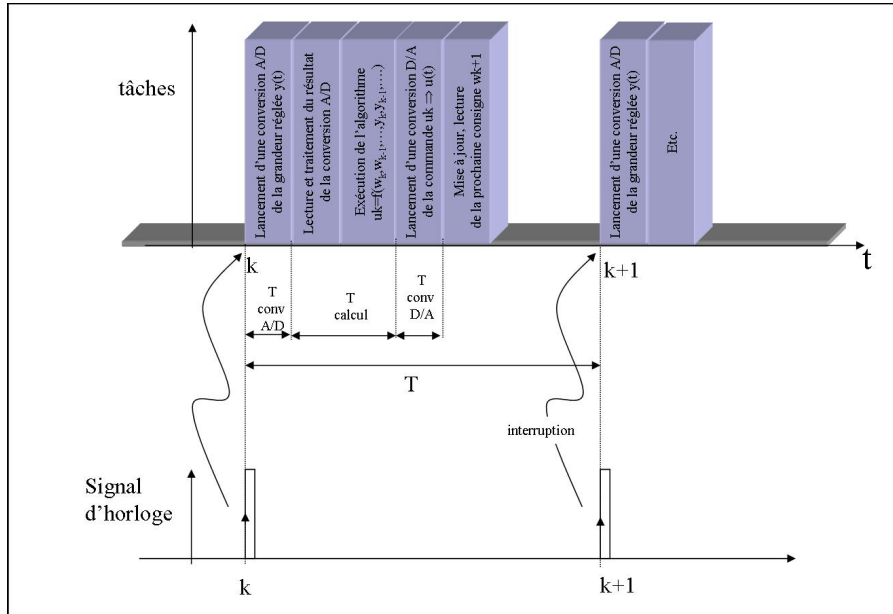


FIGURE 4.19 – Cadencement d'une routine de régulation.

Le cas A de la figure 4.20 est presque idéal. Le cas B est le cas limite, le retard pur introduit par le temps de calcul est de  $T_e/2$ . Si le temps de calcul est vraiment trop important, il vaut mieux attendre le coup d'horloge suivant pour envoyer la commande. Bien entendu ce cas introduit un retard pur dans le système qui doit être pris en compte au moment de la synthèse (cas C). Un peu d'astuce permet presque toujours de se ramener au cas D où tout ce qui peut être pré-calculé pour la commande suivante l'est juste après la sortie de la commande en cours.

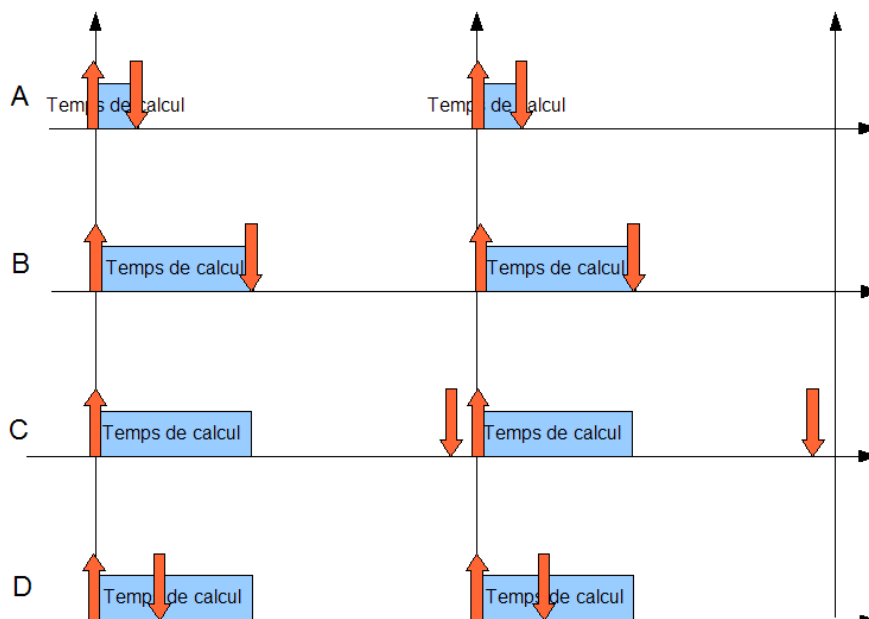


FIGURE 4.20 – Répartition du temps de calcul.



```

Fonction interruption PID( : void) : void
|
| result : void
|
| /* Mesure de la sortie */
|  $y_n \leftarrow \text{CAN};$ 
|
|
| /* Calcul de l'erreur */
|  $\varepsilon_n \leftarrow w_n - y_n;$ 
|
| /* Calcul des termes du PID */
|  $p_n \leftarrow K_p \varepsilon_n;$ 
|  $d_n \leftarrow K_d(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1});$ 
|  $i_n \leftarrow i_{n-1} + K_i \varepsilon_n;$ 
|
| /* Calcul de la commande */
|  $v_n \leftarrow p_n + d_n + i_n;$ 
|
| /* Modèle de l'actionneur */
| Si ( $v_n \leq U_{inf}$ ) Alors
| |  $u_n \leftarrow U_{inf};$  /* Commande réelle = saturation basse */
|
| Sinon
| | Si ( $v_n \geq U_{sup}$ ) Alors
| | |  $u_n \leftarrow U_{sup};$  /* Commande réelle = saturation haute */
| | Sinon
| | |  $u_n \leftarrow v_n;$  /* Commande réelle = commande PID */
| | Fin Si
| Fin Si
|
| Fin Si
| /* Sortie de la commande */
|  $\text{CNA} \leftarrow u_n;$ 
|
| /* Désaturation du terme intégral */
|  $i_n \leftarrow i_n + u_n - v_n;$ 
|
| /* Mise à jour des variables */
|  $\varepsilon_{n-1} \leftarrow \varepsilon_n;$ 
|  $i_{n-1} \leftarrow i_n;$ 
|
| Fin

```

Algorithme 1: Algorithme de PID classique avec anti-windup.



# Chapitre 5

## Synthèses à temps d'établissement fini

### 5.1 Synthèse en $z$ de correcteurs

#### 5.1.1 Exemple idiot... mais riche d'enseignements

Soit à corriger un système  $G(z)$  :

$$G(z) = \frac{(z-2)(z-0.5)}{(z+0.7)(z-0.8)(z-1)}$$

On se propose de créer un correcteur parfait, c'est-à-dire, la compensation parfaite du système par le correcteur  $C(z)$  soit :

$$C(z) = \frac{1}{G(z)} = \frac{(z+0.7)(z-0.8)(z-1)}{(z-2)(z-0.5)}$$

Le système corrigé en boucle ouverte devient donc :

$$C(z) G(z) = \frac{1}{G(z)} G(z) = 1$$

C'est bien un système parfait, il est même inutile de boucler ! Bien entendu cela ne peut pas fonctionner et ce pour deux raisons.

#### Stabilité

$$C(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{(z+0.7)(z-0.8)(z-1)}{(z-2)(z-0.5)}$$

Inutile de se lancer dans une étude, le correcteur  $C(z)$  est ostensiblement instable à cause du pôle en 2, donc extérieur au cercle unité.

**Causalité** Etudions l'équation récurrente de ce correcteur :

$$C(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{(z+0.7)(z-0.8)(z-1)}{(z-2)(z-0.5)}$$

donc

$$U(z)[(z-2)(z-0.5)] = \varepsilon(z)[(z+0.7)(z-0.8)(z-1)]$$

$$U(z)[z^2 - 2.5z + 1] = \varepsilon(z)[z^3 - 1.1z^2 - 0.46z + 0.56]$$

En multipliant droite et gauche par  $z^{-2}$

$$U(z)[1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}] = \varepsilon(z)[z - 1.1 - 0.46z^{-1} + 0.56z^{-2}]$$

$$U(z) = \varepsilon(z)[z - 1.1 - 0.46z^{-1} + 0.56z^{-2}] + U(z)[2.5z^{-1} - z^{-2}]$$

En revenant à l'original :

$$u(k) = \varepsilon(k+1) - 1.1 \varepsilon(k) - 0.46 \varepsilon(k-1) + 0.56 \varepsilon(k-2) + 2.5u(k-1) - u(k-2)$$

$u(k)$  est une fonction de la commande à l'instant suivant  $\varepsilon(k+1)$ ! Ce correcteur n'est pas causal, il est donc impossible à réaliser.

Les synthèses de correcteurs numériques conduisent souvent à des correcteurs non causaux et/ ou instables, il faut donc systématiquement vérifier :

- la causalité
- la stabilité

La méthode précédente ayant échoué, on se propose de réaliser un autre correcteur pratiquement aussi "idéal" que le précédent mais utilisant le bouclage.

$$F(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

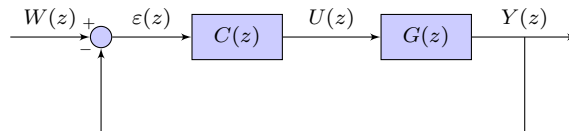


FIGURE 5.1 – Système bouclé.

**Première tentative :**

$$F(z) = 1 \Rightarrow \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} = 1$$

$$\Rightarrow \dots 1 = 0$$

C'est encore impossible!

**Deuxième tentative :** La perfection étant impossible à atteindre, essayons de déterminer un correcteur qui rendrait le système corrigé équivalent à un retard pur. La sortie suivrait parfaitement l'entrée mais décalée d'une période d'échantillonnage.

On résout donc :

$$F(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} = z^{-1}$$

$$C(z) = \frac{z^{-1}}{G(z)(1 - z^{-1})}$$

Application numérique :

$$C(z) = 0.04 \frac{50z^2 - 5z - 28}{2z^2 - 5z + 2}$$

**causalité :** oui

**stabilité :** non (pôles en 0.5 et 2!)

Le résultat de cette correction est présenté en figure 5.2. Comme prévu le système est bien instable, mais observez que la réponse continue du système passe bien par 1 aux instants d'échantillonnage!

Essayons de formaliser un peu plus cette approche à l'aide des synthèses à temps d'établissement fini.

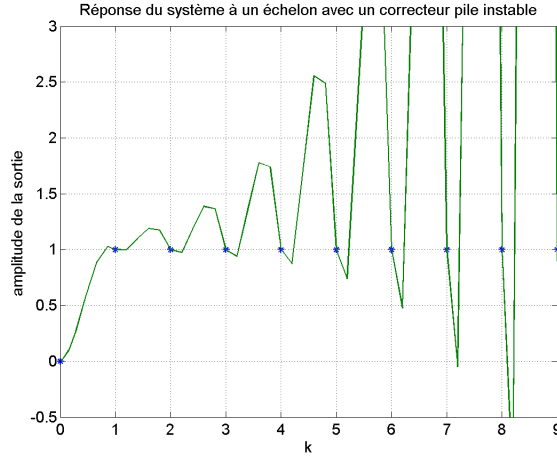


FIGURE 5.2 – Réponse du système à un échelon.

## 5.2 Synthèses à temps d'établissement fini

Un système est dit "à temps d'établissement fini" lorsque son erreur  $\varepsilon^*(k) = 0$  en un nombre fini de périodes d'échantillonnage, l'entrée étant un polynôme en  $t$  spécifié (le plus souvent un échelon :  $t^0$ ).

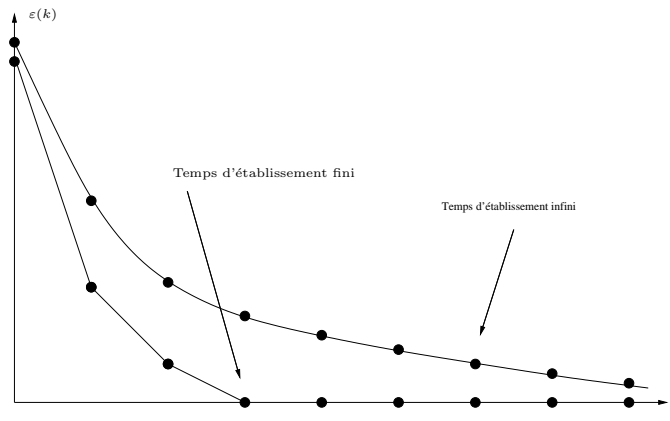


FIGURE 5.3 – Comparaison de l'erreur permanente entre un système à temps d'établissement fini ou infini.

**Définition** Un système est dit à temps d'établissement fini si l'erreur  $\varepsilon^*(t)$  s'annule en un nombre fini d'échantillons, pour une entrée  $w(t) = t^m$  spécifiée.

**Corollaire**  $\varepsilon(z)$  est donc un polynôme en  $z$  (donc pas une fraction rationnelle)<sup>1</sup>.

La transformée en  $z$  de  $w(t) = t^m$  est de la forme<sup>2</sup>  $W(z) = \frac{W_N(z)}{(1-z^{-1})^{m+1}}$  avec  $W_N(z)$  polynôme en  $z$  de degré  $d \leq m$ .

$$\varepsilon(z) = W(z) - Y(z) = W(z) [1 - F(z)] = \frac{W_N(z)(1 - F(z))}{(1 - z^{-1})^{m+1}} \quad (5.1)$$

où  $F(z)$  est la transmittance en boucle fermée.

Pour que  $\frac{W_N(z)(1-F(z))}{(1-z^{-1})^{m+1}}$  soit un polynôme il faut et il suffit que  $1 - F(z)$  contienne  $(1 - z^{-1})^{m+1}$  en facteur, donc  $1 - F(z)$  s'écrit sous la forme :

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})^{m+1} K(z) \quad (5.2)$$

1. Calculons  $\varepsilon(z)$  de la figure 5.3 par la formule de définition de la transformées en  $z$  (2.13)

$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 z^{-1} + \varepsilon_2 z^{-2}$  : c'est bien un polynôme.

2. voir eq. 2.11 page 27

où  $K(z)$  est un polynôme.

Pour vérification, appliquons le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})\varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{W_N(z)(1 - F(z))}{(1 - z^{-1})^{m+1}} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{W_N(z)(1 - z^{-1})^{m+1}K(z)}{(1 - z^{-1})^{m+1}} = 0$$

### 5.2.1 Synthèse à temps d'établissement minimal absolu

**Définition** Un système est dit à temps d'établissement minimal lorsque le degré de  $\varepsilon(z)$  est minimal.

En reprenant les équations (5.1) et (5.2)

$$\varepsilon(z) = \frac{W_N(z)(1 - F(z))}{(1 - z^{-1})^{m+1}} = W_N(z)K(z)$$

Si  $K(z) = 1$ , alors le système est dit minimal absolu. Dans ce cas :

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})^{m+1}$$

$$\varepsilon(z) = W_N(z) = w_0 + w_1z^{-1} + w_2z^{-2} + \dots + w_dz^{-d}$$

Donc  $\varepsilon^*(t)$  s'annule pour  $t = (d + 1)T_e$

Le correcteur  $C(z)$  est alors :

$$C(z) = \frac{1 - (1 - z^{-1})^{m+1}}{(1 - z^{-1})^{m+1}G(z)}$$

Remarque 1 : Le correcteur compense les pôles et les zéros de  $G(z)$  donc cette méthode de commande ne s'applique qu'aux systèmes ne possédant que des pôles et des zéros stables !

Remarque 2 : seul  $\varepsilon^*(t)$  s'annule, pas  $\varepsilon(t)$  !

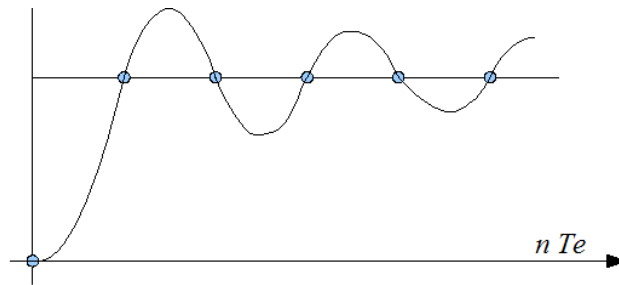


FIGURE 5.4 – L'erreur échantillonnée est bien nulle mais l'erreur continue ne l'est pas.

### 5.2.2 Synthèse à temps d'établissement minimal non absolu

Si le système modélisé par  $G(z)$  possède des pôles ou des zéros extérieurs au cercle unité, la synthèse à temps d'établissement minimal absolu n'est plus applicable. La synthèse en temps d'établissement minimal consiste alors à chercher  $K(z)$  de degré minimal respectant les deux conditions suivantes :

- $F(z)$  doit posséder parmi ses racines les zéros de  $G(z)$  extérieurs au cercle unité
- $1 - F(z)$  doit posséder parmi ses racines les pôles de  $G(z)$  extérieurs au cercle unité

Démonstration : posons

$$G(z) = \frac{B^+(z)B^-(z)}{A^+(z)A^-(z)}$$

où  $B^+(z), B^-(z), A^+(z), A^-(z)$  sont des polynômes tels que :

$B^+(z)$  contient tous les zéros de  $G(z)$  intérieurs au cercle unité (dits "stables")

$B^-(z)$  contient tous les zéros de  $G(z)$  extérieurs au cercle unité (dits "instables")

ainsi que les retards purs du système

$A^+(z)$  contient tous les pôles de  $G(z)$  intérieurs au cercle unité (stables)

$A^-(z)$  contient tous les pôles de  $G(z)$  extérieurs au cercle unité (instables)

alors :

$$C(z) = \frac{A^+(z)A^-(z)}{B^+(z)B^-(z)} \frac{F(z)}{1 - F(z)}$$

Comme  $C(z)$  ne peut pas contenir  $B^-(z)$  au dénominateur (pôles instables) alors  $F(z)$  doit contenir en facteur la partie instable  $B^-(z)$ . De même,  $C(z)$  ne peut pas contenir au numérateur  $A^-(z)$  (ce serait de la compensation de pôles de  $G(z)$  instable!) donc  $1 - F(z)$  doit contenir en facteur  $A^-(z)$ .

Remarque : les pôles et zéros sur le cercle unité sont à considérer comme instables.

Le problème posé se ramène à la résolution de 3 équations :

$$F(z) = B^-(z)L(z) \quad (\text{non compensation des zéros instables par le correcteur}) \quad (5.3)$$

$$1 - F(z) = A^-(z)J(z) \quad (\text{non compensation des pôles instables par le correcteur}) \quad (5.4)$$

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})^{m+1}K(z) \quad (\text{temps d'établissement fini}) \quad (5.5)$$

avec  $L(z)$ ,  $J(z)$  et  $K(z)$  des polynômes à déterminer. En posant  $K(z) = A^-(z)K'(z)$ , les 3 équations précédentes se condensent en :

qui se condense en :

$$F(z) = B^-(z)L(z) \quad (5.6)$$

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})^{m+1}A^-(z)K'(z) \quad (5.7)$$

$$(5.8)$$

Cela revient à résoudre l'équation diophantienne

$$(1 - z^{-1})^{m+1}A^-(z)K'(z) + B^-(z)L(z) = 1$$

Le correcteur s'écrit alors :

$$C(z) = \frac{1}{\text{système}} \frac{F(z)}{1 - F(z)}$$

$$C(z) = \frac{A^+(z)A^-(z)}{B^+(z)B^-(z)} \frac{F(z)}{1 - F(z)}$$

$$= \frac{A^+(z)A^-(z)}{B^+(z)B^-(z)} \frac{B^-(z)L(z)}{(1 - z^{-1})^{m+1}A^-(z)K'(z)}$$

$$C(z) = \frac{A^+(z)L(z)}{B^+(z)(1 - z^{-1})^{m+1}K'(z)} \quad (5.9)$$

Si la résolution donne

$$K(z) = A^-(z)K'(z) = k_0 + k_1z^{-1} + k_2z^{-2} + \dots + k_nz^{-n}$$

alors

$$\varepsilon(z) = W_N(z)K(z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1z^{-1} + \varepsilon_2z^{-2} + \dots + \varepsilon_{d+n}z^{-(d+n)}$$

Le transitoire est bien de durée finie, mais de  $d + n + 1$  périodes d'échantillonnage.

### 5.2.3 Réponse pile

La réponse pile est un cas particulier des systèmes à temps d'établissement minimal non absolu.

**Définition** Un système est dit à réponse pile lorsque la sortie continue atteint son régime permanent pour une entrée canonique en un nombre fini d'échantillons.

**Conditions** Pour pouvoir réaliser un correcteur à réponse pile pour une entrée de type  $w(t) = t^m$ , il faut que le système présente au moins  $m$  intégrateurs purs.

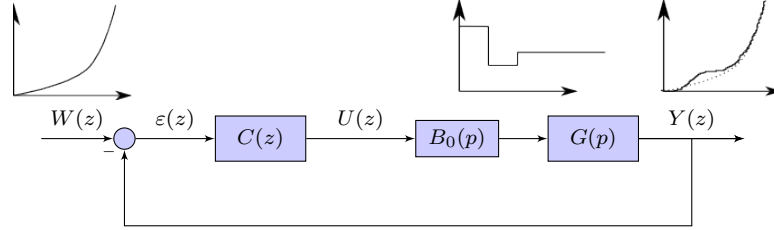


FIGURE 5.5 – Principe et signaux de la réponse pile.

La figure 5.5 montre un exemple classique avec les différents signaux. On veut, pour une entrée en parabole, que la sortie soit une parabole. Le système présentant deux intégrateurs purs, il faut que la sortie du correcteur soit une constante au bout d'un certain temps (le temps d'établissement).

Puisque la sortie du correcteur est constante au bout du temps d'établissement, cette sortie s'écrit comme la somme d'un nombre  $q$  fini d'échelons soit :

$$U(z) = \sum_{i=0}^q \frac{u_i z^{-i}}{1 - z^{-1}} = \frac{U_N(z)}{1 - z^{-1}} \quad \text{avec} \quad U_N(z) : \text{polynôme en } z$$

La sortie du système en boucle fermée est :

$$Y(z) = \underbrace{\frac{U_N(z)}{1 - z^{-1}}}_{\text{sortie correcteur}} \underbrace{\frac{B^+(z)B^-(z)}{A^+(z)A^-(z)(1 - z^{-1})^m}}_{\text{système décomposé en num, den et IT purs}^3} = \underbrace{\frac{W_N(z)}{(1 - z^{-1})^{m+1}}}_{\text{entrée en } t^m} \underbrace{F(z)}_{\text{FT en B.F.}}$$

Après simplification des termes en  $(1 - z^{-1})$  la deuxième partie de l'égalité devient :

$$U_N(z) \frac{B^+(z)B^-(z)}{A^+(z)A^-(z)} = W_N(z)F(z)$$

$$U_N(z) = W_N(z)F(z) \frac{A^+(z)A^-(z)}{B^+(z)B^-(z)}$$

$U_N, F, W_N, A^+, A^-, B^+, B^-$  étant des polynômes, il vient immédiatement que  $F$  s'écrit :

$$F(z) = B^+(z)B^-(z)L(z)$$

où  $L(z)$  est un polynôme.

La synthèse revient donc à déterminer deux polynômes  $L(z)$  et  $K(z)$  ( $K(z) = A^-(z)K'(z)$ ) tels que :

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})^{m+1} A^-(z)K'(z) \quad (5.10)$$

$$F(z) = B^+(z)B^-(z)L(z) \quad (5.11)$$

3. Seuls les  $m$  intégrateurs purs nécessaires sont extraits de  $A^-$ , si le système présente plus d'intégrateurs purs, ceux-ci sont donc dans  $A^-$ , sans perte de généralité dans le raisonnement.



Ce qui revient à résoudre l'équation diophantienne :

$$(1 - z^{-1})^{m+1}A^{-'}(z)K'(z) + B^+(z)B^-(z)L(z) = 1 \quad (5.12)$$

Le correcteur s'écrit alors :

$$C(z) = \frac{1}{\text{ystème}} \frac{F(z)}{1 - F(z)} \quad (5.13)$$

$$C(z) = \frac{A^+(z)A^{-'}(z)(1 - z^{-1})^m}{B^+(z)B^-(z)} \frac{F(z)}{1 - F(z)} \quad (5.14)$$

$$= \frac{A^+(z)A^{-'}(z)(1 - z^{-1})^m}{B^+(z)B^-(z)} \frac{B^+(z)B^-(z)L(z)}{(1 - z^{-1})^{m+1}A^{-'}(z)K'(z)} \quad (5.15)$$

$$(5.16)$$

$$C(z) = \frac{A^+(z)L(z)}{(1 - z^{-1})K'(z)}$$

#### 5.2.4 Applications des synthèses à temps d'établissement fini

- Applications sur systèmes physiques
  - Rares
  - Peu de systèmes restent linéaires avec de telles commandes avec l'exception notable de la boucle de courant dans le cas de l'asservissement des machines à courant continu.
- Applications sur systèmes informatiques
  - Plus courantes
  - Pas de physique, tout reste numérique donc pas de problème entre les instants d'échantillonnage par exemple les observateurs (voir cours de deuxième année) ou le contrôle des systèmes d'information.

### 5.2.5 Exemples de réponse pile

Le système continu étudié est :

$$T(p) = \frac{5}{p^2 + 2p + 5}$$

Pour  $T_e=1s$ , sa transformée en  $z$  avec un bloqueur d'ordre 0 est :

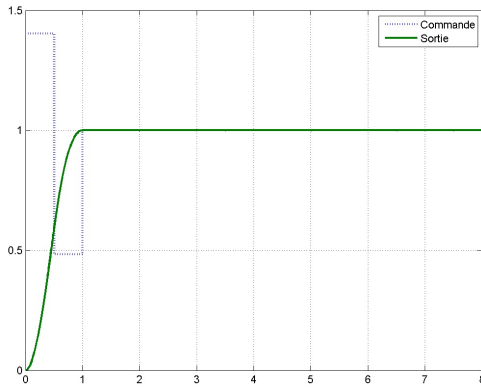
$$T(z) = \frac{0.9858z + 0.4557}{z^2 + 0.3062z + 0.1353}$$

Le correcteur "pile", calculé pour avoir une erreur à l'échelon d'entrée nulle est :

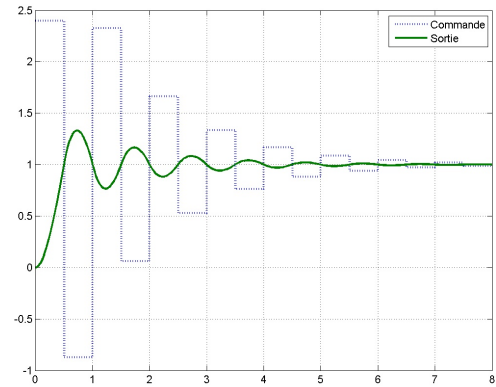
$$C_p(z) = \frac{0.6937z^2 + 0.2124z + 0.09388}{z^2 - 0.6839z - 0.3161}$$

Le correcteur pour avoir un temps d'établissement minimal est :

$$C_{em}(z) = \frac{z^2 + 0.3062z + 0.1353}{0.9858z^2 - 0.5302z - 0.4557}$$

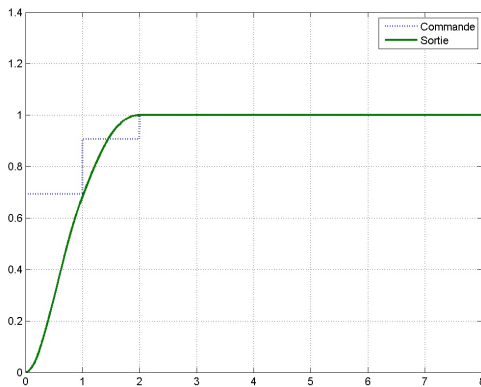


Réponse pile

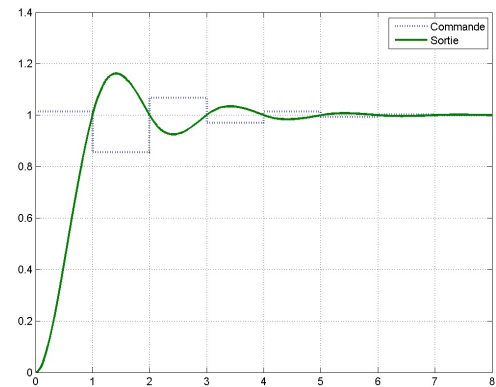


Réponse à temps d'établissement minimal

FIGURE 5.6 – Comparaison des commandes et sorties pour un correcteur "pile" et à temps d'établissement minimum :  $T_e=0.5s$ .



Réponse pile



Réponse à temps d'établissement minimal

FIGURE 5.7 – Comparaison des commandes et sorties pour un correcteur "pile" et à temps d'établissement minimum :  $T_e=1s$ .

### 5.3 Résolution de l'équation diophantienne

Quelle que soit la méthode adoptée pour le calcul du correcteur (Zdan, pile RST, ...), cela revient à la résolution d'une équation diophantienne de la forme :

$$AX + BY = C$$

où :  $A, X, B, Y$  et  $C$  sont des polynômes en  $z^{-1}$

Cette équation n'admet de solutions que ssi :

$$d^\circ X + d^\circ Y + 1 = \max\{d^\circ AX, d^\circ BY, d^\circ C, \} \quad (5.17)$$

S'il existe une solution alors :

$$d^\circ X \geq d^\circ B - 1$$

$$d^\circ Y \geq d^\circ A - 1$$

Ces conditions étant respectées, deux cas peuvent se présenter :

l'équation est régulière	l'équation est non régulière	
$d^\circ C < d^\circ A + d^\circ B$	$d^\circ C \geq d^\circ A + d^\circ B$	
	Solution minimale en $X$	Solution minimale en $Y$
$d^\circ X = d^\circ B - 1$	$d^\circ X = d^\circ B - 1$	$d^\circ X = \max\{(d^\circ C - d^\circ A), (d^\circ B - 1)\}$
$d^\circ Y = d^\circ A - 1$	$d^\circ Y = \max\{(d^\circ C - d^\circ B), (d^\circ A - 1)\}$	$d^\circ Y = d^\circ A - 1$

Soit

$$(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-k})(x_0 + x_1 z^{-1} + \dots + x_k z^{-k}) + (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m})(y_0 + y_1 z^{-1} + \dots + y_l z^{-l}) = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_p z^{-p}$$

où  $p \leq n + \sup(k, l)$

Par identification terme à terme :

$$\begin{cases} a_0 x_0 + b_0 y_0 = c_0 \\ a_1 x_0 + a_0 x_1 + b_1 y_0 + b_0 y_1 = c_1 \\ a_2 x_0 + a_1 x_1 + a_0 x_2 + b_2 y_0 + b_1 y_1 + b_0 y_2 = c_2 \\ \dots \end{cases}$$

soit sous forme matricielle :

$$\max(n+k, m+l)+1 \left\{ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & & \vdots & b_1 & b_0 & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & 0 & b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & b_2 & \ddots & b_0 \\ a_n & \vdots & & a_1 & \vdots & & & b_1 \\ 0 & a_n & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & b_m & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_n & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & b_m \end{array} \right] \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ x_k \\ y_0 \\ \vdots \\ y_l \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} c_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \right. \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{k+1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{l+1} \end{array}$$

Pour que cette matrice soit inversible, il faut que

$$\max(n+k, m+l)+1 = k+l+1$$

Ce qui correspond à l'équation 5.17. Si toutefois cette dernière condition est respectée mais que son déterminant est nul, c'est que les polynômes  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  ne sont pas premiers entre eux.

**Exemple 1** Soit à résoudre :

$$(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} - z^{-3})\mathbb{X} + (0.5 + 0.01z^{-1})\mathbb{Y} = 1$$

$$d^\circ \mathbb{C} \quad ? \quad d^\circ \mathbb{A} + d^\circ \mathbb{B} \tag{5.18}$$

$$0 < 3+1 \tag{5.19}$$

l'équation est régulière donc :

$$d^\circ \mathbb{Y} = d^\circ \mathbb{A} - 1 = 2$$

$$d^\circ \mathbb{X} = d^\circ \mathbb{B} - 1 = 0$$

$$(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} - z^{-3})(x_0) + (2 + 3z^{-1})(y_0 + y_1z^{-1} + y_2z^{-2}) = 1$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7297 \\ 0.8649 \\ -0.5676 \\ -0.2432 \end{bmatrix}$$

**Exemple 2** Soit à résoudre :

$$(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} - z^{-3})\mathbb{X} + (0.5 + 0.01z^{-1})\mathbb{Y} = 0.7z^{-2} + 0.9z^{-3} + z^{-4}$$

$$d^\circ \mathbb{C} \quad ? \quad d^\circ \mathbb{A} + d^\circ \mathbb{B} \tag{5.20}$$

$$4 \geq 3 + 1 \tag{5.21}$$

l'équation est non régulière. On choisit la première forme :

$$d^\circ \mathbb{Y} = d^\circ \mathbb{A} - 1 = 2$$

$$d^\circ \mathbb{X} = \max\{d^\circ \mathbb{C} - d^\circ \mathbb{A}\}, (d^\circ \mathbb{B} - 1) = \max\{(4 - 3, 0)\} = 1$$

$$(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} - z^{-3})(x_0 + x_1z^{-1}) + (0.5 + 0.01z^{-1})(y_0 + y_1z^{-1} + y_2z^{-2}) = 0.7z^{-2} + 0.9z^{-3} + z^{-4}$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0.01 & 0.5 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0.01 & 0.5 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.7 \\ 0.9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2930 \\ -1.0000 \\ -4.5860 \\ -7.0803 \\ 19.2996 \end{bmatrix}$$

Si on avait choisi la deuxième forme :

$$d^\circ \mathbb{X} = d^\circ \mathbb{B} - 1 = 0$$

$$d^\circ \mathbb{Y} = \max\{d^\circ \mathbb{C} - d^\circ \mathbb{B}\}, (d^\circ \mathbb{A} - 1) = \max\{(4 - 1, 2)\} = 3$$

$$(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} - z^{-3})(x_0) + (0.5 + 0.01z^{-1})(y_0 + y_1z^{-1} + y_2z^{-2} + y_3z^{-3}) = 0.7z^{-2} + 0.9z^{-3} + z^{-4}$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0.01 & 0.5 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0.01 & 0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0.01 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.7 \\ 0.9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4958 \\ 0.9916 \\ 1.9634 \\ -1.6140 \\ 0.8407 \end{bmatrix}$$



# Chapitre 6

## Méthodes de commande avancées

### 6.1 Choix des pôles en boucle fermée

C'est un choix qui ne peut être fondé que sur des considérations physiques, on n'asservit pas de la même façon un avion de combat et un avion de ligne ! Quelques règles peuvent pourtant être données, vous saurez les adapter à votre cas particulier.

Si vous avez correctement choisi votre fréquence d'échantillonnage et que votre cahier des charges n'est pas utopique, les pôles de la fonction de transfert en boucle ouverte sont à peu près dans la zone grisée de la figure 6.1.

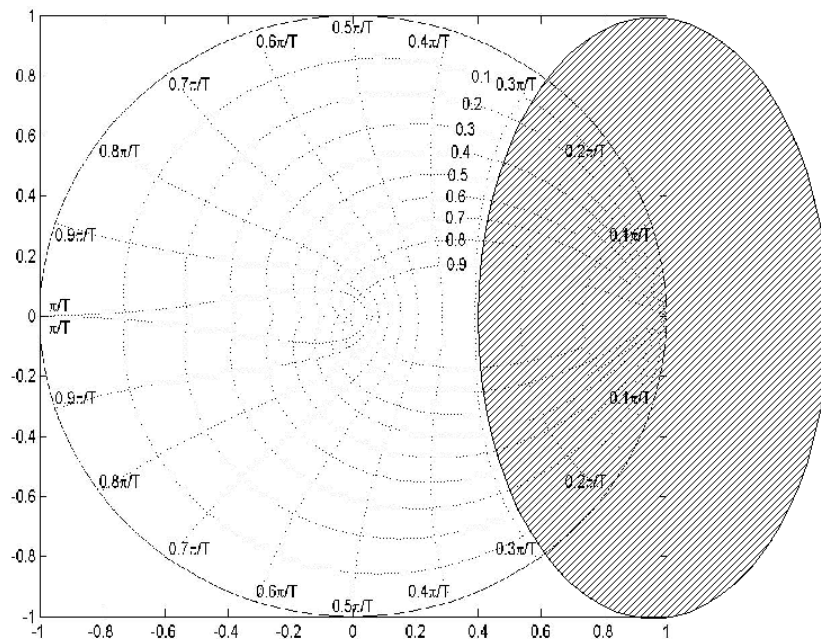


FIGURE 6.1 – Emplacement des pôles en boucle ouverte.

En boucle fermée, vous pouvez espérer accélérer le système d'un facteur 3 à 10. Après cela, vous quitterez le cadre de l'hypothèse fondamentale de ce cours : le système est *linéaire*.

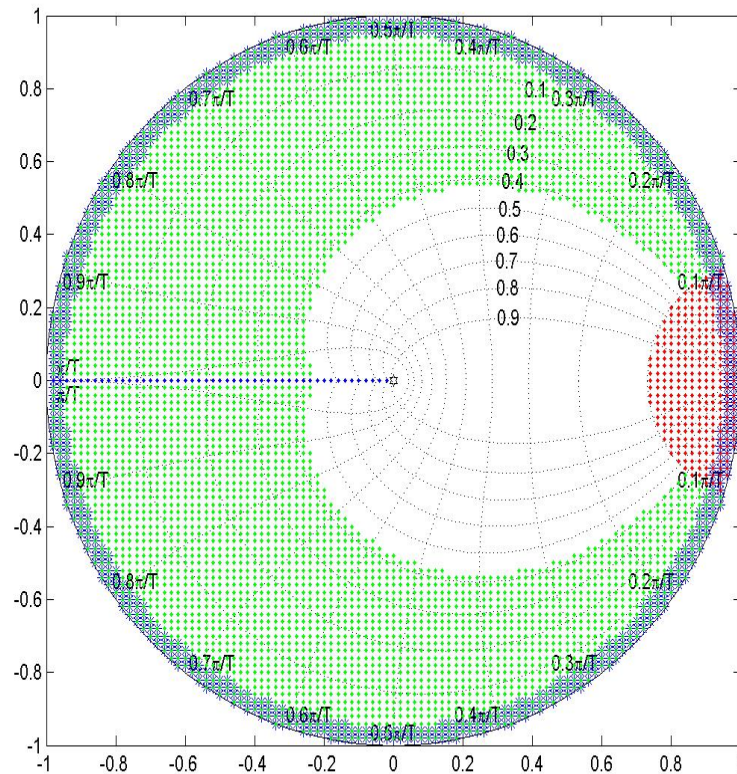


FIGURE 6.2 – Zones de placement des pôles en boucle fermée à éviter.

Les pôles du système en boucle fermée seront choisis en évitant les zones grisées de la figure 6.2. En voici les raisons :

- Pas trop proches du cercle unité. En effet une petite variation de modèle (vieillessement, variation de masse, ...) pourrait engendrer une instabilité du système.
- Pas trop proches du point 1. Sinon, vous ne diminuez pas le temps d'établissement ou alors vous avez mal choisi la fréquence d'échantillonnage.
- Pas de facteur d'amortissement trop petit, cela conduit à des dépassements importants de la consigne et allonge le temps d'établissement.
- Pas de pôles réels négatifs, car ces pôles génèrent une oscillation amortie non souhaitable.

Un pôle est très souvent utilisé, le retard pur (en  $z = 0$ ), pôle le plus "rapide".

Si vous respectez ces critères, vos pôles en boucle fermée devraient être dans la zone non grisée de la figure 6.2. Nous parlons peu des zéros de la fonction de transfert. Non pas qu'ils soient négligeables, bien au contraire ! Ils ont une influence sur le comportement du système mais sont difficiles à contrôler. En fait, leur contrôle demande un correcteur un peu plus complexe. Deux méthodes de synthèse vous sont proposées ci-après.

La première, la méthode de Zdan, ne s'occupe que des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée. En présence de zéros, une première synthèse donne un correcteur aux performances assez éloignées du cahier des charges que vous vous êtes posé. Une deuxième synthèse tenant compte de ce premier résultat donne alors de bonnes performances.



## 6.2 Méthode de Zdan

Les méthodes à temps d'établissement fini conduisent le plus souvent à des correcteurs qui génèrent des commandes trop importantes. Tous comptes faits, on cherche rarement d'aussi bonnes performances pour le système bouclé. En général, une amélioration d'un facteur 3 sur le temps d'établissement et une erreur statique voire de traînage nulle sont suffisantes, compte tenu des saturations du système.

La méthode de Zdan propose de calculer un correcteur tel que le système en boucle fermée se comporte comme un système du second ordre de pulsation propre  $\omega_n$  et de facteur d'amortissement  $\xi$  donnés.

### 6.2.1 Principe

On impose au système bouclé :

- en régime transitoire : un comportement type second ordre ( $\omega_n$  et  $\xi$ )
- en régime permanent : erreur nulle pour une entrée canonique  $w(t) = t^m$  et éventuellement une erreur donnée pour  $w_1(t) = t^{m+1}$ . Exemple : erreur nulle à l'échelon, erreur spécifiée pour une rampe.

La transmittance à asservir est mise sous la forme suivante :<sup>1</sup>

$$G(z) = \frac{B^+(z)B^-(z)}{(1-z^{-1})^l A^+(z)A^-(z)}$$

où  $B^+(z), B^-(z), A^+(z), A^-(z)$  sont des polynômes tels que :

$B^+(z)$  contient tous les zéros de  $G(z)$  intérieurs au cercle unité (dits "stables")

$B^-(z)$  contient tous les zéros de  $G(z)$  extérieurs au cercle unité (dits "instables")

ainsi que les retards purs du système

$A^+(z)$  contient tous les pôles de  $G(z)$  intérieurs au cercle unité (stables)

$A^-(z)$  contient tous les pôles de  $G(z)$  extérieurs au cercle unité (instables)

### 6.2.2 Correcteur de Zdan

Le correcteur est décomposé en trois parties, sous la forme :

$$C(z) = C_1(z) C_2(z) C_3(z)$$

$C_1(z)$  doit annuler l'erreur permanente, compte tenu des  $l$  intégrateurs purs déjà contenus dans  $G(z)$  donc, en l'absence de perturbations<sup>2</sup> :

$$C_1(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^{m+1-l}}$$

$C_2(z)$  doit compenser les pôles et les zéros stables de  $G(z)$

donc :

$$C_2(z) = \frac{A^+(z)}{B^+(z)}$$

$C_3(z)$  doit imposer le comportement en boucle fermée et comporte au moins autant de paramètres que de spécifications à satisfaire.

Posons :

$$C_3(z) = \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_2(z)}$$

$\Delta_1(z)$  et  $\Delta_2(z)$  polynômes en  $z$ .

1. La synthèse en  $z$  est parfaitement possible mais conduit à des erreurs faciles à éviter en utilisant la forme en  $z^{-1}$ .  
2. En cas de perturbations, le nombre d'intégrateurs purs ne suis pas la formule donnée. Reportez-vous au §3.4.

Donc  $C(z)$  est de la forme :

$$C(z) = \underbrace{\frac{1}{(1-z^{-1})^{m+1-l}}}_{\text{erreurs}} \underbrace{\frac{A^+(z^{-1})}{B^+(z^{-1})}}_{\text{compensation dynamique}} \underbrace{\frac{\Delta_1(z^{-1})}{\Delta_2(z^{-1})}}$$

La transmittance en boucle ouverte s'écrit alors :

$$C(z) G(z) = C_1(z) C_2(z) C_3(z) G(z) = \frac{B^-(z)\Delta_1(z)}{(1-z^{-1})^{m+1}A^-(z)\Delta_2(z)}$$

La transmittance en boucle fermée est :

$$F(z) = \frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)} = \frac{B^-(z)\Delta_1(z)}{(1-z^{-1})^{m+1}A^-(z)\Delta_2(z) + B^-(z)\Delta_1(z)} = \frac{N_F(z)}{D_F(z)}$$

En écrivant l'égalité des dénominateurs on obtient :

$$D_F(z) = (1-z^{-1})^{m+1}A^-(z)\Delta_2(z) + B^-(z)\Delta_1(z) \quad (6.1)$$

**Choix de  $D_F(z)$**  Comme indiqué précédemment, on cherche un comportement de type second ordre. Aussi,  $D_F(z)$  sera de la forme :

$$D_F(z) = \underbrace{(1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2})}_{\text{pôles dominants}}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} p_1 &= -2e^{-\xi\omega_0 T_e} \cos(\omega_0 T_e \sqrt{1-\xi^2}) \\ p_2 &= e^{-2\xi\omega_0 T_e} \end{cases}$$

**Résolution de l'équation 6.1** La méthode de résolution de cette équation est donnée au §5.3 page 75.

### Quelques remarques

Remarque 1 : En prenant  $D_F(z) = 1$  on retrouve le correcteur astatique.

Remarque 2 : Rien dans la méthode de synthèse n'oblige à choisir un comportement en boucle fermée de type second ordre, ordre 1 ou 3 ou  $n$  marchent aussi, on parle alors de méthode du modèle. Le degré de  $D(f)$  n'influe pas sur la complexité du correcteur, tant qu'il reste inférieur à  $d^\circ((1-z^{-1})^{m+1}A^-(z)) + d^\circ(B^-(z))$ .

Remarque 3 : En utilisant la décomposition en  $z^{-1}$  vous verrez apparaître les retards purs du système. Ceux-ci ne sont pas compensables, en effet un système ayant  $n$  retards purs ne répondra jamais en moins de  $n$  échantillons. A ce titre, les retards purs doivent figurer dans  $B^-(z)$  et se retrouveront dans la fonction de transfert en boucle fermée :  $N_F(z) = B^-(z)\Delta_1(z)$ .

### 6.2.3 Rappels sur les systèmes du second ordre

Voici quelques relations pour la détermination des pôles :

TABLE 6.1 – Caractéristiques temporelles d'un système du second ordre.

$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$	
Temps de réponse à $\pm 5\%$	$T_{r5\%} \simeq \frac{3}{\xi\omega_0}$
Temps de montée (10 à 90% de la valeur finale)	$T_m = \frac{\pi}{2\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$
Premier dépassement	$D_1 = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

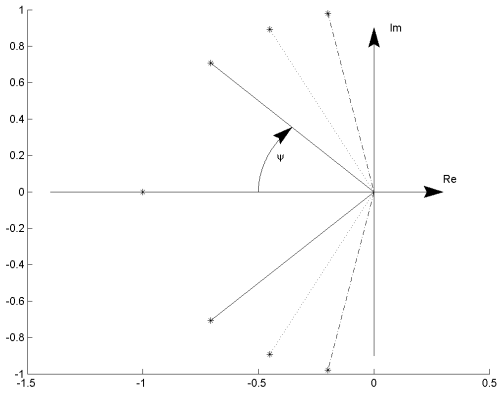
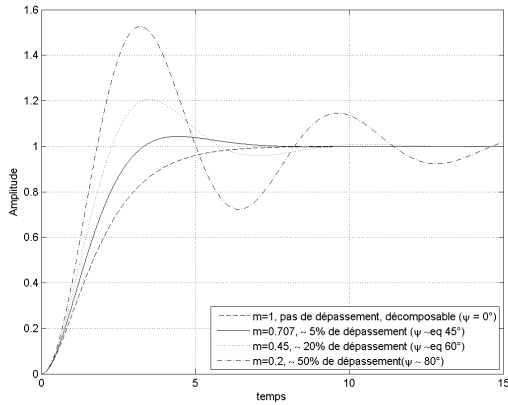
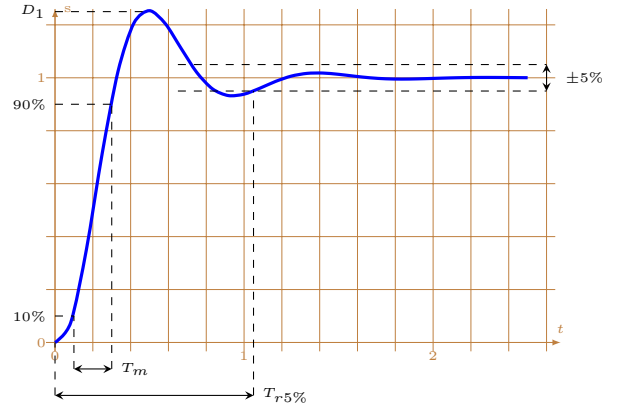


FIGURE 6.3 – Relation entre dépassement et position des pôles dans le plan complexe.

TABLE 6.2 – table

Valeurs approximatives de l'angle  $\psi$  des pôles et du dépassement indiciel en fonction du coefficient d'amortissement  $\xi$ .

$\xi$	$\psi$	Dépassement
1	$0^\circ$	0 %
0.707	$45^\circ$	5 %
0.45	$60^\circ$	20 %
0.20	$80^\circ$	50 %

### 6.3 Commande RST

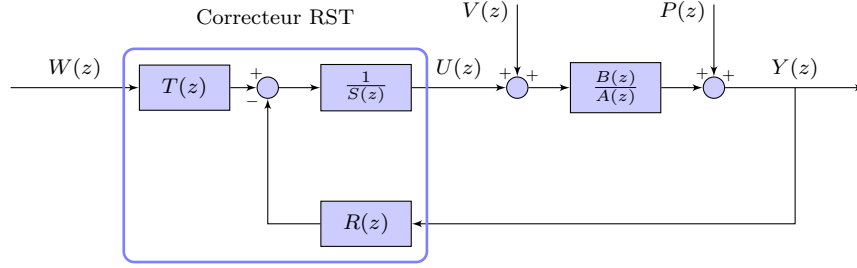


FIGURE 6.4 – Principe de correction par correcteur RST.  $V(z)$  est une perturbation de charge,  $P(z)$  est une perturbation de sortie.

La forme générale de la loi de commande d'un correcteur de type RST est : (voir schéma 6.4)

$$S(z)U(z) = T(z)W(z) - R(z)Y(z) \quad (6.2)$$

donc :

$$U(z) = \frac{T(z)}{S(z)}W(z) - \frac{R(z)}{S(z)}Y(z) \quad (6.3)$$

La sortie du système bouclé est donnée par :

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U(z) + \frac{B(z)}{A(z)}V(z) + P(z)$$

Afin d'alléger les notations, les arguments des polynômes ne seront plus notés.  
En réécrivant (6.2) et (6.3),

$$S U(z) = T W(z) - R Y(z) \quad (6.4)$$

$$A Y(z) = B U(z) + B V(z) + A P(z) \quad (6.5)$$

Explicitons  $U(z)$  :

$$\begin{aligned} AS U(z) &= AT W(z) - AR Y(z) \\ AS U(z) &= AT W(z) - BR U(z) - BR V(z) - AR P(z) \\ (AS + BR) U(z) &= AT W(z) - BR V(z) - AR P(z) \end{aligned}$$

$$U(z) = \frac{AT}{AS + BR} W(z) - \frac{BR}{AS + BR} V(z) - \frac{AR}{AS + BR} P(z) \quad (6.6)$$

et  $Y(z)$

$$\begin{aligned} AS Y(z) &= BS U(z) + BS V(z) + AS P(z) - AR Y(z) \\ AS Y(z) &= BT W(z) - BR Y(z) + BS V(z) + AS P(z) \\ (AS + BR) Y(z) &= BT W(z) + BS V(z) + AS P(z) \end{aligned}$$

$$Y(z) = \frac{BT}{AS + BR} W(z) - \frac{BS}{AS + BR} V(z) - \frac{AS}{AS + BR} P(z) \quad (6.7)$$

### 6.3.1 Synthèse de la loi de commande RST

**Synthèse par placement de pôles** On cherche une loi de commande  $U(z)$  telle que le système en boucle fermée ait une fonction de transfert modèle donnée de la forme :

$$F_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$$

or, d'après 6.7 et en supposant  $V = P = 0$

$$Y(z) = \frac{BT}{AS + BR}W(z) \quad (6.8)$$

Il faut donc réaliser :

$$\frac{BT}{AS + BR} = \frac{B_m}{A_m} \quad (6.9)$$

**Compensation des zéros** Afin de simplifier les calculs mais surtout afin d'obtenir une fonction de transfert d'ordre le plus faible possible, on cherche à compenser les pôles et les zéros.

Posons :

$$B = B^+ B^-$$

où :

$B^+$  contient tous les zéros de  $G(z)$  intérieurs au cercle unité (dits "stables")

$B^-$  contient tous les zéros de  $G(z)$  extérieurs ou sur le cercle unité (dits "instables")

Note 1 : afin d'obtenir ultérieurement  $S$  sous forme monique on prendra  $B^+$  sous forme monique.

Note 2 : concernant les retards purs, ceux-ci étant impossibles à compenser ils font donc partie de  $B^-$ , car le système ne peut réagir plus vite que son retard pur.

$B^-$  ne pouvant être en facteur de  $AS + BR$  (compensation interdite) il faut que  $B^-$  divise  $B_m$ , donc :

$$B_m = B^- B'_m$$

$B^+$  peut être un facteur de  $AS + BR$  (compensation permise) il devra dans ce cas diviser aussi  $S$ , donc :

$$S = B^+ S'$$

Réécrivons ces résultats, (6.9) devient :

$$\frac{B^+ B^- T}{B^+ (AS' + B^- R)} = \frac{B^- B'_m}{A_m} \quad (6.10)$$

en simplifiant :

$$\frac{T}{AS' + B^- R} = \frac{B'_m}{A_m} \quad (6.11)$$

Ce qui implique que :

$$T = A_0 B'_m \quad (6.12)$$

$$AS' + B^- R = A_0 A_m \quad (6.13)$$

où  $A_0$  est un polynôme donné dit polynôme observateur par analogie avec la commande par retour d'état (Cours commande avancée 2A).

Le polynôme caractéristique de la boucle fermée est alors :

$$AS + BR = B^+ A_0 A_m \quad (6.14)$$

**Remarque 1 :**  $A_0$  contient les modes de la boucle fermée qui ne seront pas excités par le signal de commande, par contre ces modes seront excités par une perturbation !

$$\left. \frac{Y}{W} \right|_{P=V=0} = \frac{BT}{AS + BR} = \frac{BA_0 B'_m}{B^+ A_0 A_m} = \frac{B^- B'_m}{A_m} = \frac{B_m}{A_m}$$

Par contre :

$$\left. \frac{Y}{P} \right|_{W=V=0} = \frac{AS}{AS + BR} = \frac{AB^+ S'}{B^+ A_0 A_m} = \frac{AS'}{A_0 A_m}$$

**Remarque 2 :**

$$\left. \frac{U}{W} \right|_{P=V=0} = \frac{AT}{AS + BR} = \frac{AA_0B'_m}{B^+A_0A_m} = \frac{AB'_m}{B^+A_m}$$

Les zéros stables du procédé apparaissent comme des pôles de la fonction de transfert de  $W$  vers  $U$  ce qui peut être néfaste (exemple pôles stables à partie réelle négative).

**Annulation de l'erreur statique vis-à-vis des perturbations** Ce qui suit n'est valable que pour une perturbation  $P$ , si la perturbation est en  $V$  (voir schéma 6.4), le raisonnement reste identique mais les intégrateurs purs du système ( $l$ ) ne peuvent être pris en compte, car pour annuler l'erreur l'intégrateur doit être situé entre l'entrée de perturbation et l'erreur.

La fonction de transfert de la boucle est :

$$F_b = \frac{BR}{AS} = \frac{B^-R}{AS'}$$

Pour annuler une erreur statique d'ordre  $m$  il faut que  $F_b$  ait  $m + 1$  intégrateurs purs (échelon :  $m=0$ , 1 IT pur).

La fonction de transfert du procédé possède déjà  $l$  pôles en  $z = 1$  donc :

$$A(z) = (1 - z^{-1})^l A^+ A^-$$

Pour que  $F_b$  possède  $m + 1$  pôles en  $z = 1$ , il faut que  $S'$  soit de la forme :

$$S' = (1 - z^{-1})^{m+1-l} S'_1$$

l'équation diophantienne (6.13) devient :

$$(1 - z^{-1})^{m+1} S'_1 A^+ A^- + B^- R = A_0 A_m \quad (6.15)$$

### 6.3.2 Choix des polynômes $A_m$ , $B_m$ et $A_0$

$A_m$

C'est le dénominateur de la fonction de transfert voulue. Il contient donc les pôles voulus. Comme pour la méthode de Zdan, on les choisit plutôt de la forme deux pôles complexes conjugués dominants et  $n$  pôles négligeables.

$B_m$

Là encore comme pour la méthode de Zdan,  $B_m$  doit contenir tous les retards purs du système à corriger. Il contient aussi tous les zéros dit "instables", c'est-à-dire extérieurs au cercle unité.

$B_m$  peut aussi contenir d'autres zéros, en particulier ceux qui, tout en étant intérieurs au cercle unité, ont une partie réelle négative. S'ils sont compensés, donc au dénominateur du correcteur, la commande du système présentera une réponse indicielle alternée rapide, peu appréciée des systèmes (voir fig. 3.8).

$A_0$

Le polynôme d'"observation"  $A_0$  est, en général, choisi égal à 1, on a alors une dynamique identique en asservissement et en régulation. On peut aussi le choisir de la forme  $(1 - az^{-1})$ . Dans ce cas, on filtre les perturbations, la réaction de l'asservissement sera plus "douce" mais plus longue.

### 6.3.3 Cas particuliers du correcteur RST

**Le correcteur série**

En choisissant  $T = R$  on obtient le correcteur série de la forme

$$C(z) = \frac{R(z)}{S(z)}$$

En reprenant 6.12

$$R = T = A_0 B'_m$$

Si on compense les pôles stables du procédé à l'aide de  $A_0$  le polynôme d'observation :

$$A_0 = A^+$$

donc,

$$R = A^+ B'_m$$

et l'équation diophantienne (6.15) devient :

$$(1 - z^{-1})^{m+1} S'_1 A^+ A^- + B^- A^+ B'_m = A^+ A_m \quad (6.16)$$

soit,

$$(1 - z^{-1})^{m+1} A^- S'_1 + B^- B'_m = A_m \quad (6.17)$$

qui est en fait l'équation diophantienne de la méthode de Zdan en posant :

$$\begin{aligned} \Delta_1(z) &= B'_m(z) \\ \Delta_2(z) &= S'_1(z) \end{aligned}$$

### Le correcteur avec modèle

En choisissant  $T = A_m$ , la fonction de transfert entre  $W(z)$  et  $Y(z)$  devient

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = B^-(z) B'_m(z) = B_m(z)$$

Ce qui, la plupart du temps se réduit à  $B^-(z)$ , soit les retards purs du système (et éventuellement les zéros extérieurs au cercle unité). Cela revient donc à une synthèse de type réponse pile. Afin d'éviter des commandes ( $U(z)$ ) trop importantes, on place un modèle de référence en amont de  $T(z)$  :  $\frac{N(z)}{D(z)}$ .

Ainsi, la dynamique de réjection de perturbation est fixée par le choix de  $A_m(z)$ , la dynamique d'asservissement est elle fixée par le choix de  $\frac{N(z)}{D(z)}$ .

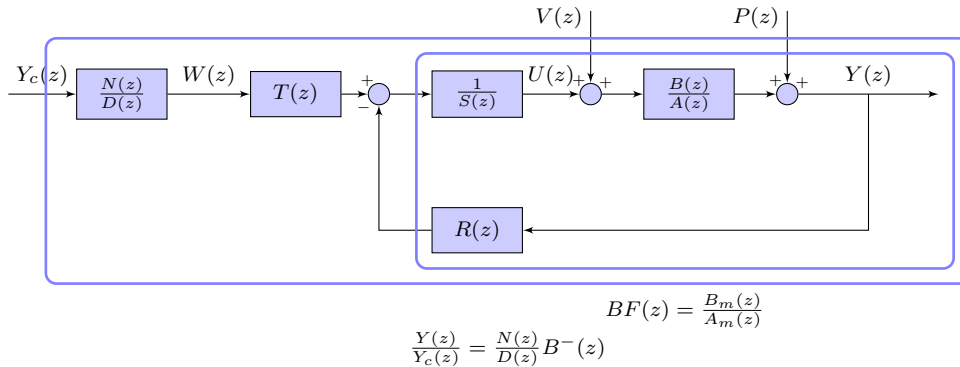


FIGURE 6.5 – Principe de correction par correcteur RST.  $V(z)$  est une perturbation de charge de type échelon.  $P(z)$  est une perturbation de charge de type rampe





# Chapitre 7

## Conclusion

### 7.1 Choix de la méthode de correction

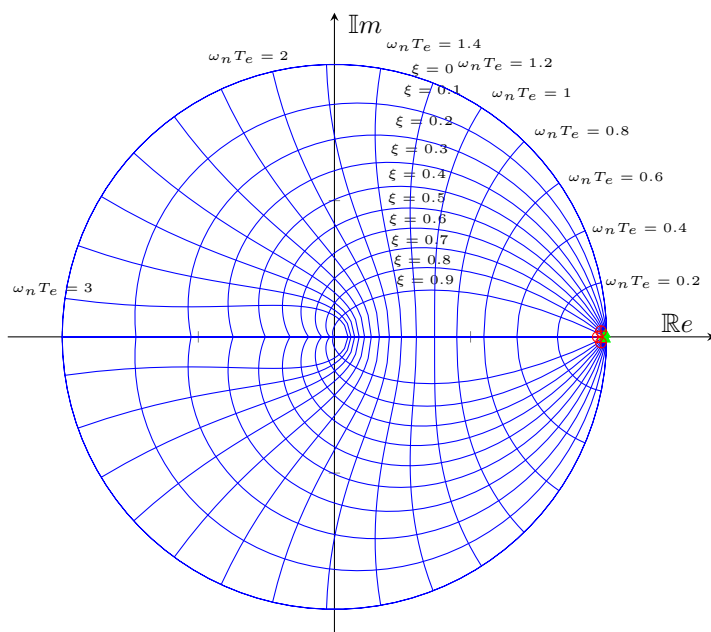
Vaste sujet! Le choix n'est malheureusement pas tranché mais voici quelques idées, présentées à travers un exemple, à adapter à votre problème particulier.

Soit à asservir le système :

$$G_{BO}(p) = \frac{1}{\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)(1 + \tau p)}$$

On souhaite avoir en boucle fermée un système environs trois fois plus rapide, un dépassement inférieur à 5%. Soit

#### 7.1.1 Exemple 1 : le système est sur-échantillonné

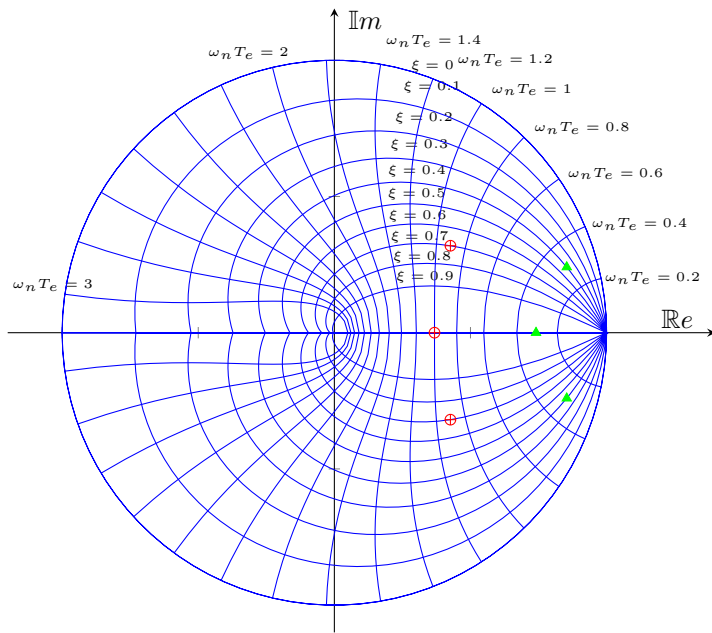


$$G(z) = \frac{4.991e-009z^2 + 1.992e-008z + 4.972e-009}{z^3 - 2.992z^2 + 2.985z - 0.9925}$$

- Description des pôles demande une grande précision numérique
- Virgule fixe : insuffisant → travail en flottants.
- Compensation des pôles et zéros peu robuste
- → PID
  - Peu de termes dans le correcteur → temps de calcul ↘
  - Naturellement robuste

pôles en BO  $\triangle$  , pôles en BF  $\oplus$

### 7.1.2 Exemple 2 : échantillonnage type Bühler

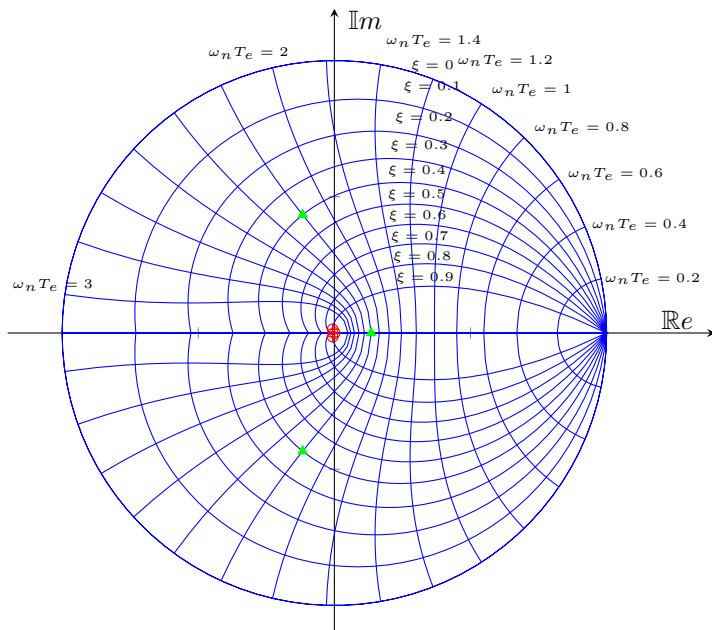


$$G(z) = \frac{0.1288z^2 + 0.2504z + 0.03127}{z^3 - 0.9183z^2 + 0.388z - 0.05931}$$

- Bonne description des pôles.
- Virgule fixe : suffisant.
- Compensation des pôles et zéros OK
- → RST
  - Choix des pôles en BF très ouvert
  - Possibilité de "découplage" asservissement - régulation

pôles en BO  $\triangle$  , pôles en BF  $\oplus$

### 7.1.3 Exemple 3 : sous-échantillonnage



$$G(z) = \frac{1.02z^2 - 0.009126z + 0.0003664}{z^3 + 0.01116z^2 + 0.000209z - 2.862e-007}$$

- Pôles en BF proches de 0.
- Virgule fixe : suffisant.
- Compensation des pôles et zéros OK
- → Pile
  - Autant viser des pôles en zéro (retards purs)

pôles en BO  $\triangle$  , pôles en BF  $\oplus$

# Bibliographie

- [1] E. Ostertag, *Automatique - Systèmes et asservissements continus*. France : Ellipses, 2005.
- [2] B. Lang and V. Minzu, *Commande automatique des systèmes lineaires continus. Cours avec applications utilisant matlab*. France : Ellipses, 2001.
- [3] Y. Sevely, *Systèmes et asservissements linéaires échantillonnés*. Paris : Dunod Université, 1973.
- [4] H. Bühler, *Réglages échantillonnés, volume 1, traitement par la transformation en z*. Lausanne, Suisse : Presses polytechniques et universitaires romandes, 1986.
- [5] Y. Granjon, *Automatique*. Dunod : Ellipses, 2001.
- [6] E. Godoy and E. Ostertag, *Commande numérique des systèmes*. France : Ellipses, 2005.
- [7] B. Jouvencel. Automatique échantillonnée. [Online]. Available : <http://www.lirmm.fr/jouvence/>
- [8] M. Etique. (2005, octobre) Régulation numérique. [Online]. Available : <http://iai.eivd.ch/users/mee/>
- [9] D. Peaucelle. (2003, avril) Systèmes à temps discret, commande numérique des procédés. [Online]. Available : <http://www.laas.fr/%7Epeaucell/DPpages/DPteach.html>
- [10] J. Chemla. (2005, octobre) Systèmes asservis échantillonnés. [Online]. Available : <http://auto.polytech.univ-tours.fr/automatique/SSE/ressources/cours.pdf>
- [11] S. Tliba, M. Jungers, and Y. Chitour. (2005, september) Commande des processus : asservissement numériques. [Online]. Available : <http://www.satie.ens-cachan.fr/automatique/PolyMaster-final.pdf>
- [12] D. Arzelier. Représentation et analyse des systèmes linéaires. [Online]. Available : [http://www.laas.fr/arzelier/polycop/n6k1/poly\\_v5-2.pdf](http://www.laas.fr/arzelier/polycop/n6k1/poly_v5-2.pdf)
- [13] K. J. Åström and T. Hägglund, *PID Controllers : Theory, Design, and Tuning Second Edition*. Research Triangle Park, 1995.
- [14] A. O'DWYER, "Pi and pid controller tuning rules for time delay processes : a summary," 2000. [Online]. Available : [citeseer.ist.psu.edu/dwyer00pi.html](http://citeseer.ist.psu.edu/dwyer00pi.html)
- [15] A. Schopenhauer. L'art d'avoir toujours raison. [Online]. Available : <http://www.philo5.com/Mes%20lectures/Schopenhauer,%20L'art%20d'avoir%20toujours%20raison.htm>



**Première partie**

**Annexes**



**Annexe A**

**Tables de transformées**

TABLE A.1 – Table des transformées de Laplace et en  $z$  usuelles.

$\mathbf{X(p)}$	$\mathbf{x(t)}$	$\mathbf{X(z)}$
1	$\delta(t)$	1
$e^{-kT_e p}$	$\delta(t - kT_e)$	$z^{-k}$
$\frac{1}{p}$	$\mathcal{H}(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	$t$	$\frac{T_e z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_e}}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$te^{-at}$	$\frac{T_e z e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2}$
$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$1 - e^{-t/\tau}$	$\frac{(1-e^{-T_e/\tau})z}{(z-1)(z-e^{-T_e/\tau})}$
$\frac{1}{p^2(1+\tau p)}$	$t - \tau + \tau e^{-t/\tau}$	$\frac{T_e z}{(z-1)^2} - \frac{\tau(1-e^{-T_e/\tau})z}{(z-1)(z-e^{-T_e/\tau})}$
$\frac{1}{p(1+\tau p)^2}$	$1 - (1 + \frac{t}{\tau})e^{-t/\tau}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T_e/\tau}} - \frac{T_e z e^{-T_e/\tau}}{\tau(z-e^{-T_e/\tau})^2}$
$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{z \sin \omega T_e}{z^2 - 2z \cos \omega T_e + 1}$
$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{z(z - \cos \omega T_e)}{z^2 - 2z \cos \omega T_e + 1}$
$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{ze^{-aT_e} \sin \omega T_e}{z^2 - 2ze^{-aT_e} \cos \omega T_e + e^{-2aT_e}}$
$\frac{p}{(p+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{z^2 - ze^{-aT_e} \cos \omega T_e}{z^2 - 2ze^{-aT_e} \cos \omega T_e + e^{-2aT_e}}$
$\frac{\omega_n^2}{p(p^2+\omega_n^2)}$	$1 - \cos \omega_n t$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z(z - \cos \omega_n T_e)}{z^2 - 2z \cos \omega_n T_e + 1}$
$\frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$	$\frac{\omega_p}{1-\xi^2} e^{-\xi \omega_n t} \sin \omega_p t$ $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$	
$\frac{1}{p(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2})}$	$1 - \frac{\omega_n}{\omega_p} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_p t + \psi)$ $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ $\psi = \cos^{-1} \xi$	
$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_e}} - \frac{z}{z-e^{-bT_e}}$
$\frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$	$1 - \frac{b}{a-b} e^{-at} - \frac{a}{a-b} e^{-bt}$	$\frac{z}{z-1} + \frac{bz}{(a-b)(z-e^{-aT_e})} - \frac{az}{(a-b)(z-e^{-bT_e})}$



TABLE A.2 – Table des transformées en  $z$  des systèmes classiques précédés d'un bloqueur d'ordre 0.  $T_e$  est la période d'échantillonnage et  $a = e^{-T_e/\tau}$

Transmittance en $p$	Transmittance en $z$
$\frac{B_0(p)}{p}$	$\frac{T_e}{z-1}$
$\frac{B_0(p)}{1+\tau p}$	$\frac{1-a}{z-a}, a = e^{-T_e/\tau}$
$\frac{B_0(p)}{p(1+\tau p)}$	$\frac{(T_e - \tau(1-a))z - aT_e + \tau(1-a)}{z^2 - (1+a)z + a}$
$\frac{B_0(p)}{p^2(1+\tau p)}$	$\frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 - (2+a)z^2 + (1+2a)z - a}$ $b_2 = \frac{T_e^2}{2} + T_e \tau + \tau^2(1-a)$ $b_1 = \left(\frac{T_e^2}{2} - 2\tau^2\right)(1-a) + T_e \tau(1+a)$ $b_0 = \tau^2(1-a) - aT_e\left(\tau + \frac{T_e}{2}\right)$
$\frac{B_0(p)}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$\frac{b_1 z + b_0}{z^2 - (e^{-T_e/\tau_1} + e^{-T_e/\tau_2})z + e^{-T_e/\tau_1} e^{-T_e/\tau_2}}$ $b_1 = \frac{\tau_1(1 - e^{-T_e/\tau_1}) - \tau_2(1 - e^{-T_e/\tau_2})}{\tau_1 - \tau_2}$ $b_0 = e^{-T_e/\tau_1} e^{-T_e/\tau_2} - \frac{\tau_1 e^{-T_e/\tau_2} - \tau_2 e^{-T_e/\tau_1}}{\tau_1 - \tau_2}$
$\frac{B_0(p)}{(1+\tau p)^2}$	$\frac{1-a}{z-a} - \frac{T_e}{\tau} \frac{a(z-1)}{(z-a)^2}$
$\frac{B_0(p)}{(1+\tau p)^3}$	$\frac{1-a}{z-a} - \frac{T_e(2\tau + T_e)a(z-1)}{\tau^2(z-a)^2} - \frac{T_e^2 a^2(z-1)}{\tau^2(z-a)^3}$
$\frac{B_0(p)}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$\frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 - (1+a_1+a_2)z^2 + (a_1+a_2+a_1a_2)z - a_1a_2}$ $a_i = e^{-T_e/\tau_i}$ $b_2 = T_e - \frac{\tau_1^2(1-a_1) - \tau_2^2(1-a_2)}{\tau_1 - \tau_2}$ $b_1 = -T_e(a_1 + a_2) - \frac{\tau_1^2(1+a_2)(1-a_1) - \tau_2^2(1+a_1)(1-a_2)}{\tau_1 - \tau_2}$ $b_0 = -T_e a_1 a_2 - \frac{\tau_1^2 a_2(1-a_1) - \tau_2^2 a_1(1-a_2)}{\tau_1 - \tau_2}$
$\frac{B_0(p)}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$ $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ $\xi < 1$	$\frac{b_0 + b_1 z}{z^2 - 2ze^{-\xi\omega_n T_e} \cos(\omega_p T_e) + e^{-2\xi\omega_n T_e}}$ $b_0 = e^{-2\xi\omega_n T_e} + e^{-\xi\omega_n T_e} \left( \frac{\sin(\omega_p T_e)}{\sqrt{1-\xi^2}} - \cos(\omega_p T_e) \right)$ $b_1 = 1 - e^{-\xi\omega_n T_e} \left( \frac{\xi \sin(\omega_p T_e)}{\sqrt{1-\xi^2}} + \cos(\omega_p T_e) \right)$



Annexe B

Travaux dirigés

## B.1 TD 1 : Etude d'un cheptel

On souhaite modéliser l'évolution du cheptel d'un éleveur de bovins. Soit :

- $x_{1_k}$  : le nombre de vaches de 1 an,
- $x_{2_k}$  : le nombre de vaches de 2 ans,
- $x_{3_k}$  : le nombre de vaches de 3 ans et plus,
- $y_k$  : le nombre total de vaches.

Ces valeurs représentant des nombres moyens au cours de l'année  $k$ .

La natalité du troupeau est telle que :

- Les vaches de 1 an ne se reproduisent pas.
- Les vaches de deux ans produisent en moyenne 0.8 veau par an.
- Celles de trois ans et plus 0.4 veau par an.

D'autre part, seules celles de trois ans et plus meurent de causes naturelles avec un taux moyen de 30 % par an. Enfin l'éleveur s'autorise à acheter ou vendre uniquement des vaches de trois ans et plus. Soit  $u_k$  le nombre de vaches achetées ( $u_k > 0$ ) ou bien vendues ( $u_k < 0$ ) au cours de l'année  $k$ .

Le système ainsi décrit a une cadence  $T_e$  de 1 an. Cette cadence peut s'interpréter comme une période d'échantillonnage si l'on considère que le procédé (élevage) est en réalité continu (les vaches existent entre 2 mesures). La notion d'échantillonnage correspond au choix de compter les vaches une fois par an.

1. Etablir les équations récurrentes de ce système.
2. En déduire la fonction de transfert  $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$  et l'équation récurrente qui relie uniquement l'entrée et la sortie du système.
3. Calculer les pôles de la transmittance. Le système est-il stable ?
4. On considère une loi de commande telle que :  $u_k = K(y_{c_k} - y_k)$ . Dessiner le schéma fonctionnel et calculer la transmittance en boucle fermée  $BF(z) = \frac{Y(z)}{Y_c(z)}$ .
5. Etudier la stabilité de ce système en fonction de  $K$ .
6. Le correcteur  $K$  est remplacé par un correcteur  $C(z)$  de la forme

$$C(z) = \frac{(k_p + k_i)z - k_p}{z - 1}$$

Déterminer  $k_p$  et  $k_i$  tels que le système présente deux pôles en 0. Calculer la valeur numérique des deux autres pôles. Quel type de comportement aura alors le système en boucle fermée ?

7. Sans calcul, déterminer le gain statique du système en boucle fermée.

### Pour aller plus loin :

- Par le calcul de la valeur finale de la sortie du système soumis à un échelon unité, déterminer le gain statique du système en boucle fermée.
- En supposant une petite erreur de modélisation, les vaches de trois ans et plus ne produisent plus 0.4 mais 0.5 veau par an, quelle est l'erreur statique du système en boucle fermée ?
- Etablir la relation de récurrence entre la commande  $u_k$  et la consigne  $y_{c_k}$ , en déduire les commandes de vaches de 3 ans et plus sur les trois premières années.
- En utilisant Matlab tracer le lieu d'Evans de  $G(z)$  : Retrouver sur ce lieu le domaine des valeurs de  $K$  assurant la stabilité. Observer les réponses à un échelon de ce système pour des valeurs de  $K$  correspondant aux différents modes. Quelle est la valeur de  $K$  qui vous semble la plus satisfaisante.
- Reprendre la simulation avec Simulink en considérant que la consigne fixée par l'éleveur est d'avoir un cheptel de 30 vaches ( $y_c=30$ ). Observer l'évolution du troupeau et des achats ou ventes de bétail par l'éleveur.

## B.2 TD 2 : Etude d'un four électrique

Soit un four électrique. Autour d'un point de fonctionnement, la transmittance liant la variation de température  $\theta_s(p)$  à la variation de tension de commande  $U(p)$  est de la forme :

$$G(p) = \frac{\theta_s(p)}{U(p)} = \frac{K e^{-10p}}{1 + 100p}$$

Ce four est commandé par ordinateur selon le schéma fonctionnel donné en figure B.1

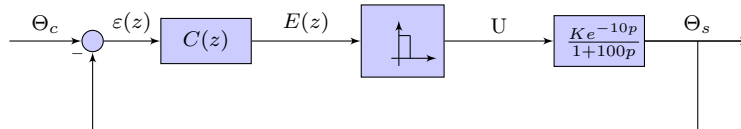


FIGURE B.1 – Schéma fonctionnel de l'asservissement du four.

- On choisit une période d'échantillonnage  $T_e=10$  secondes. Justifier ce choix. Montrer que la transmittance  $G(z)$  du système échantillonné-bloqué d'entrée  $E(z)$  et sortie  $\Theta_s(z)$  est de la forme :

$$G(z) = \frac{\Theta_s(z)}{E(z)} = \frac{K(1-a)}{z(z-a)}$$

- On utilise un régulateur  $C(z)$  de la forme :

$$C(z) = \frac{A(z-a)}{K(1-a)(z-\beta)}$$

- Calculer l'erreur statique. On souhaite une erreur statique nulle. Quelle valeur faut-il donner à  $\beta$  ?
  - Etudier la stabilité du système en boucle fermée en fonction de  $A$ .
  - Montrer qu'il faut  $A < 0.25$  pour avoir une réponse sans dépassement.
  - Pour  $A = 0.25$  calculer la réponse du système à un échelon unité. Calculer les 10 premières valeurs de cette réponse et en déduire le temps de réponse à 5%.
- On souhaite améliorer la rapidité de la réponse indicielle. Pour cela on choisit maintenant un régulateur de la forme :

$$C(z) = \frac{A(z-a)(z-\alpha)}{K(1-a)(z-1)(z-\beta)}$$

Calculer  $A$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  pour avoir une réponse en 2 périodes d'échantillonnage.

- Le correcteur  $C(z)$  est-il stable et causal ?
- Peut-on trouver un correcteur donnant une réponse en une période ?

### Pour aller plus loin :

- Calculer les valeurs de  $A$  rendant stable le système en boucle fermée par 3 méthodes différentes :
  - Critère de Jury
  - Calcul direct des pôles en boucle fermée
  - Critère de Routh sur la transformée en  $w$
- Calculer les 10 premières valeurs de la réponse indicielle par deux méthodes différentes.

### B.3 TD 3 : Synthèses quasi continu

Soit le système défini par sa transmittance opérationnelle  $G(p)$

$$G(p) = \frac{2}{(p+1)^3}$$

La réponse de ce système soumis à un échelon d'entrée est donnée en figure.

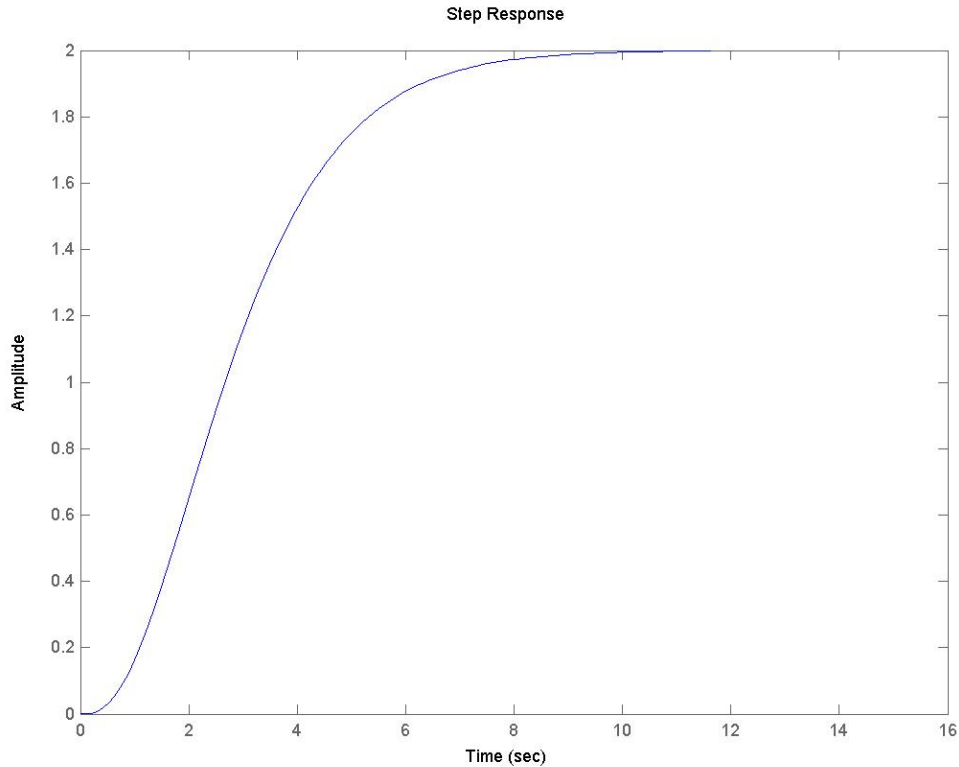


FIGURE B.2 – Réponse indicielle de  $G(p)$ .

#### B.3.1 Correcteur de type Ziegler-Nichols

1. Déterminer les valeurs numériques de la plus grande pente  $a$  et du retard pur  $\tau$  (voir tableau 4.1 page 57).
2. Calculer l'indice de réglabilité. Quel correcteur faut-il implanter ?  
*A des fins pédagogiques, pour que les résultats soient un peu plus flagrants, on choisira  $\tau = 1$*
3. Calculer les paramètres ( $K$ ,  $T_i$ ,  $T_d$ ) d'un correcteur de type PID de Ziegler-Nichols.
4. En déduire un correcteur numérique par l'application de la transformée bilinéaire.
5. Montrer que la transformée bilinéaire d'un correcteur PID parfait conduit systématiquement à un correcteur instable.
6. Afin de rendre physiquement réalisable le PID on y ajoute un terme filtrant sur le terme "dérivée"

$$C(p) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1 + p/N} \right) \quad \text{typiquement : } N = 5$$

Déterminer alors le nouveau correcteur numérique.

#### B.3.2 Correcteur de type Takahashi

1. Avec les valeurs de  $a$  et  $\tau$  déterminées précédemment, calculer les paramètres d'un correcteur de type PID, suivant les réglages de Takahashi.

### B.3.3 Implantation sous Matlab-Simulink

Cette partie utilise les fichiers "simuTD4.mdl" et "TD4.m"

Pour une entrée en échelon unité :

1. Simuler les deux correcteurs précédents avec  $T_e = 0.5, 0.1, 0.01$  et  $0.002s$ .
2. Comparer les réponses en fonction de la période d'échantillonnage.
3. Pour  $T_e = 0.1s$ , comparer les sorties des systèmes corrigés par un correcteur de type Ziegler-Nichols et transformée bilinéaire avec un correcteur de Takahashi. "pédagogique". Observer les commandes.
4. Comparer les sorties des systèmes corrigés par un correcteur de type "pédagogique" avec un correcteur de type Takahashi "industriel"

### B.3.4 Anti-windup

Dans cette partie, l'entrée sera un échelon d'amplitude 30. Le système présente une saturation de commande d'entrée à 17 V.

1. Observer la différence de comportement de la sortie entre un échelon unité et un échelon d'amplitude 30.
2. Mettre en place un anti-windup, tel qu'indiqué sur le schéma 4.15 page 61.
3. Déterminer le gain  $K_{aw}$  maximum tel que le système reste stable.
4. Pour minimiser encore la commande, lors de la mise en route du système, on place un générateur de trajectoire tel qu'indiqué au §4.4.1. Quelle valeur doit-on donner au "slew rate" afin que l'anti-windup ne soit plus utile ?
5. Avec une perturbation en rampe de pente 1 démarrant à  $t = 20s$ , interpréter ce qui se passe à  $30 < t < 35s$  et  $35 < t < 40s$

---

**Pour aller plus loin :** Reprendre l'ensemble des simulations avec les correcteur déterminés précédemment et le système suivant :

$$G(p) = \frac{12}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

Conclure sur la robustesse des méthodes proposées.

---

## B.4 TD 4 : Comparaison des synthèses à temps d'établissement fini

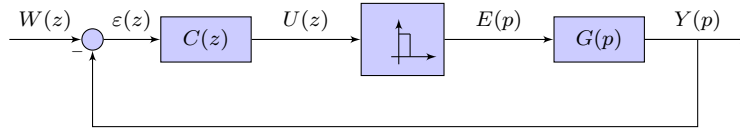


FIGURE B.3 – Schéma fonctionnel de l'asservissement du four.

Le processus continu à contrôler est défini par sa transmittance opérationnelle  $G(p)$

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3}$$

### Modélisation

1. En prenant  $T_e = 1$ , montrer que la transformée en  $z$  de  $B_0(p)G(p)$  est :

$$G(z) = \frac{0.1577z^{-1}(1 + 0.2697z^{-1})}{(1 - 0.3679z^{-1})(1 - 0.0498z^{-1})}$$

### Correction

1. Quelle est la différence fondamentale entre réponse pile et réponse à temps d'établissement minimal ?
2. Faire la synthèse dans les deux cas pour une entrée en échelon unité.
3. Vérifier la stabilité et la causalité de vos correcteurs.
4. Comparer les points suivants :
  - la valeur de l'erreur en régime permanent,
  - la valeur maximum de la commande,
  - le temps d'établissement.

### Pour aller plus loin :

#### Comparaison à périodes d'échantillonnage différentes avec Matlab

1. La fonction de transfert entre la commande du système et l'entrée s'écrit :

$$H(z) = \frac{U(z)}{W(z)} = \frac{C(z)}{1 + C(z)G(z)} = \frac{N(z)}{b_1 + b_0z^{-1}}$$

Dans les deux cas, montrer que la première commande appliquée  $u(0)$  s'écrit sous la forme :

- Réponse en temps minimal :  $u(0) = \frac{3}{b_1}$
  - Réponse pile :  $u(0) = \frac{3}{b_1 + b_0}$
2. Déterminer, par dichotomie, la période  $T_e$  pour que la première commande effectuée soit inférieure ou égale à 3.
  3. En supposant que la commande sature à la valeur 3 et que l'on désire rester dans le domaine linéaire, donc que  $u(0) \leq 3$ , comparer les temps d'établissement du système bouclé avec chaque correcteur.



## B.5 TD 5 : Méthode de Zdan

L'objectif est de mettre en œuvre un correcteur de type Zdan sur un processus simple et d'en "mesurer" les limites.

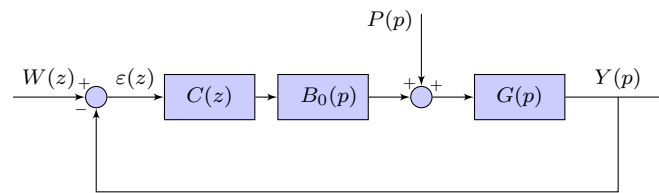


FIGURE B.4 – Système étudié.

Le processus à commander a pour transmittance opérationnelle  $G(p)$ , définie par :

$$G(p) = \frac{1}{p(1+p)}$$

Le cahier des charges du système en boucle fermée est :

- dynamique identique à celle d'un système continu du second ordre de pulsation  $\omega_n = 0.2 \text{ rad.s}^{-1}$  et de facteur d'amortissement  $\xi = 0.6$ .
- L'erreur permanente vis-à-vis d'une entrée  $W(z)$  en rampe soit nulle malgré une perturbation  $P(p)$  en échelon.

1. Proposer une période d'échantillonnage  $T_e$ .
2. Déterminer un modèle  $M(z)$  ayant le comportement dynamique demandé par le cahier des charges.
3. Déterminer le nombre d'intégrateurs purs nécessaires pour satisfaire le cahier des charges. En déduire  $C_1(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^n}$ .
4. Après avoir décomposé  $G(z)$  sous la forme :

$$G(z) = \frac{B^+(z)B^-(z)}{(1-z^{-1})^l A^+(z)A^-(z)}$$

déterminer  $C_2(z)$  qui compense les parties compensables de  $G(z)$ .

5. En posant :

$$C_3(z) = \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_2(z)}$$

écrire l'équation diophantienne reliant  $\Delta_1(z)$  et  $\Delta_2(z)$  aux autres paramètres du système en boucle fermée.

6. Après avoir déterminé l'ordre de  $\Delta_1(z)$  et celui de  $\Delta_2(z)$ , résoudre cette équation diophantienne.
7. Ecrire alors  $C(z) = C_1(z) \cdot C_2(z) \cdot C_3(z)$ . Ce correcteur est-il stable et causal ?
8. Quelle est la valeur de l'erreur d'ordre 2 en régime permanent ?
9. Quelle est l'erreur permanente due à une perturbation  $P(p)$  en rampe unité ( $P(t) = t$ ) ?
10. Que peut-on prévoir quant au dépassement relatif à la réponse indicielle ?

## B.6 TD 6 Correcteur RST

L'objectif de ce TD est de déterminer un correcteur de type RST avec des objectifs de régulation et d'asservissement différents. On choisira :

- Une régulation très rapide (rejet de perturbations).
- Un asservissement sans dépassement.

Le système à asservir possède une transmittance en boucle ouverte  $G(p)$

$$G(p) = \frac{k}{(1 + \tau p)^2}$$

Applications numériques :  $\tau = \frac{1}{2\pi 100} = 1.59 \cdot 10^{-3}$ ,  $k = 1$

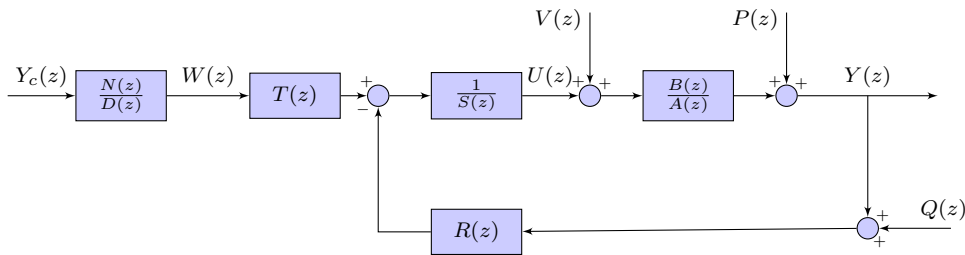


FIGURE B.5 – Principe de correction par correcteur RST.  $V(z)$  est une perturbation de charge de type échelon.  $P(z)$  est une perturbation de charge de type rampe,  $Q(z)$  est une perturbation de capteur de type sinusoïdal à 50 Hz.

### Cahier de charges en boucle fermée

- L'erreur permanente d'ordre 0 en réponse à un échelon d'entrée  $W(z)$  doit être nulle et ce, y compris en cas de perturbations  $V(z)$  en forme d'échelon et en cas de perturbations  $P(z)$  en forme de rampe.
- Le système en boucle fermée doit rejeter asymptotiquement les perturbations sinusoïdales  $Q(z)$  qui sont un bruit de capteur à 50 Hz.
- La dynamique de rejet des perturbations est telle que le système présente deux pôles complexes conjugués avec 5% de dépassement et un temps de montée de  $\tau/2$ .
- Le système doit répondre sans dépassement à un échelon de consigne  $W(z)$  avec une constante de temps de  $\tau_{BF} = \tau$ .

### Détermination des modèles en boucle fermée

1. Déterminer la transformée en  $z$  de du système modélisé par  $G(p)$  que l'on nommera  $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ .
2. On montrera que le système complet présentera les pôles définis par  $D(z)$ . Proposer un polynôme  $D(z)$  répondant au cahier des charges en asservissement.
3. Déterminer un polynôme  $A_m$  qui présente les pôles répondant au cahier des charges de la dynamique de rejet des perturbations.
4. En fonction des trois modèles précédents déterminer une période d'échantillonnage correcte.

**Synthèse de la régulation** Dans cette partie on ne tiendra pas compte de la perturbation sinusoïdale  $Q(z)$ .

1. Décomposer  $G(z)$  sous la forme :

$$G(z) = \frac{B^+(z)B^-(z)}{A^+(z)A^-(z)}$$

où  $B^+(z), A^+(z)$  sont compensables et  $B^-(z), A^-(z)$  ne le sont pas.

2. On décompose le polynôme  $S(z)$  en un produit de trois polynômes :
  - $S_1(z)$  contient le nombre d'intégrateurs purs nécessaires pour répondre au cahier des charges,
  - $S_2(z)$  compense les zéros compensables de  $B(z)$ ,
  - $S_3(z)$  assurera la dynamique voulue en boucle fermée.
Donner les polynômes  $S_1(z)$  et  $S_2(z)$ .
3. Le polynôme  $R(z)$  est décomposé sous la forme suivante :

- $R_1(z)$  est un zéro de transmission à la fréquence de 50 Hz de la forme :

$$1 - 2e^{-\xi_r \omega_r T_c} \cos\left(T_c \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}\right) z^{-1} + e^{-2\xi_r \omega_r T_c} z^{-2} = 1.0000 - 1.9840z^{-1} + 0.9997z^{-2}$$

où  $\omega_r$  est la pulsation rejetée, ici  $\omega_r = 2\pi 50 \text{ rad.s}^{-1}$ .  $\xi_r$  est le facteur d'amortissement choisi proche de 0, on prendra  $\xi_r = 0.001$ .

- $R_2(z)$  assurera la dynamique voulue en boucle fermée.

Donner l'équation diophantienne liant  $S_3(z)$ ,  $R_2(z)$  et  $A_m(z)$  tels que la transmittance du système en boucle fermée présente les pôles imposés par le cahier des charges.

4. Poser cette équation sous forme matricielle.
5. Calculer l'erreur permanente de votre système corrigé en l'absence de perturbations.

### Synthèse de l'asservissement

1. Le polynôme  $T(z)$  sera pris égal à  $A_m(z)$ . Montrez que la transmittance opérationnelle liant la consigne et la sortie est :

$$H(z) = \frac{B^-(z)N(z)}{D(z)}$$

2. Déterminer  $N(z)$  tel que le gain de l'ensemble soit unitaire.
3. Donner  $U(z)$  en fonction de  $Y_c(z)$  et  $Y(z)$ .
4. En déduire l'équation récurrente de votre correcteur et vérifier la causalité de ce correcteur.

## B.7 TD 7 Asservissement de position d'une machine à courant continu

Ce TD à pour objet l'étude de l'asservissement de position d'une machine à courant continu commandée par l'induit<sup>1</sup>.

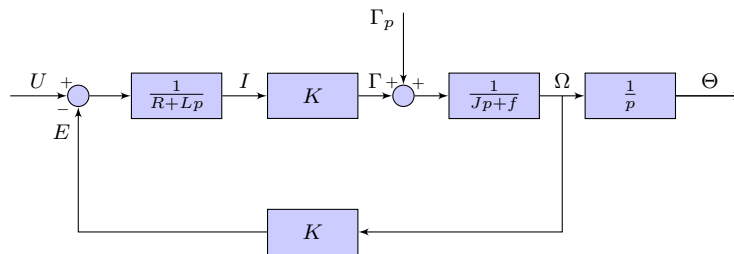


FIGURE B.6 – Schéma bloc de la machine à courant continu commandée par l'induit.

On procédera dans l'ordre à l'asservissement :

- de courant
- de vitesse
- de position

Les constantes de temps  $\tau_e = \frac{L}{R}$  et  $\tau_m = \frac{J}{f}$  étant très différentes

### B.7.1 Boucle de courant

Dans cette partie on ne considère que la constante de temps électrique du moteur, la force électromotrice  $E$  est considérée comme une perturbation. Le hacheur est considéré comme étant un retard pur de 1 période d'échantillonnage. Le correcteur  $C_I(z)$  sera implanté comme indiqué sur la figure B.7.

1. Dessiner le schéma simplifié en fonction des hypothèses ci-dessus.
2. Déterminer la transformée en  $z$  de l'ensemble {Bloqueur d'ordre 0, hacheur, Constante de temps électrique}.
3. Déterminer un correcteur  $C_I(z)$  qui permet une réponse pile en deux coups d'horloge.

1. C'est la commande la plus classique pour un moteur d'asservissement qui, la plupart du temps, ne possède pas d'inducteur !

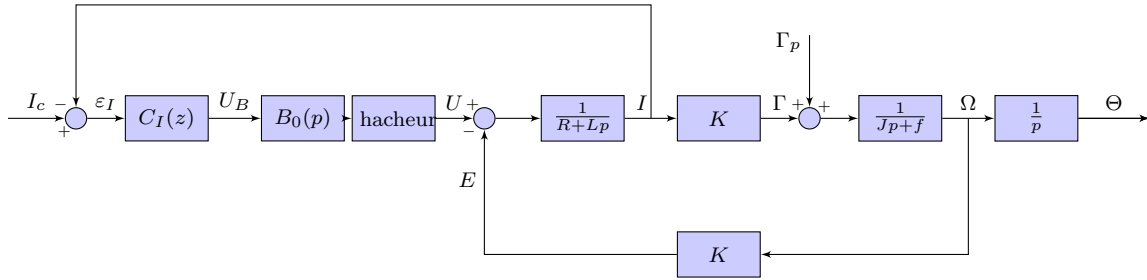


FIGURE B.7 – Asservissement numérique de courant.

4. Vérifier la stabilité et la causalité de votre correcteur  $C_I(z)$ .
5. On se propose d'implanter un correcteur de Dahlin de la forme :

$$C_I(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{(1 - \alpha)z^{-k}}{1 - \alpha z^{-1} - (1 - \alpha)z^{-k}}$$

avec  $\alpha$  aussi petit que l'on veut.

6. Montrer que l'utilisation de ce correcteur revient à imposer en boucle fermée un comportement de type :

$$M(p) = \frac{e^{-Tp}}{1 + \tau p}$$

7. Quelles sont les limites d'un tel correcteur ?
8. Ce correcteur garantit-il une erreur statique nulle, y compris en présence de la perturbation  $E$  ?

### B.7.2 Boucle de vitesse

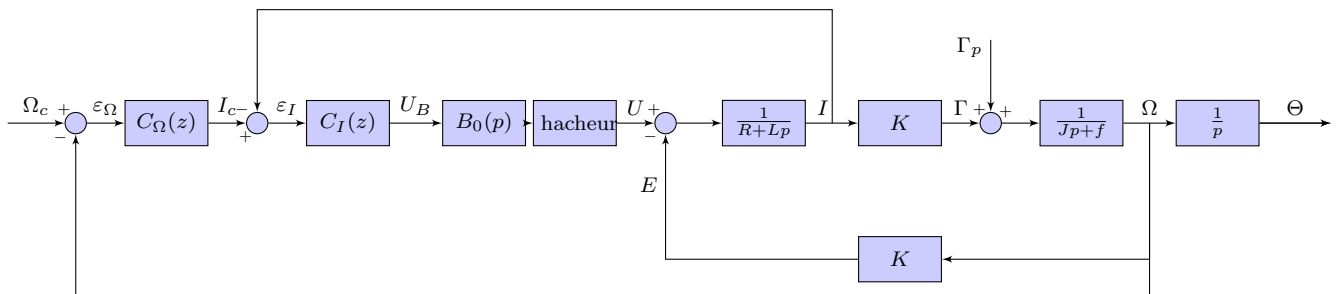


FIGURE B.8 – Asservissement numérique de vitesse.

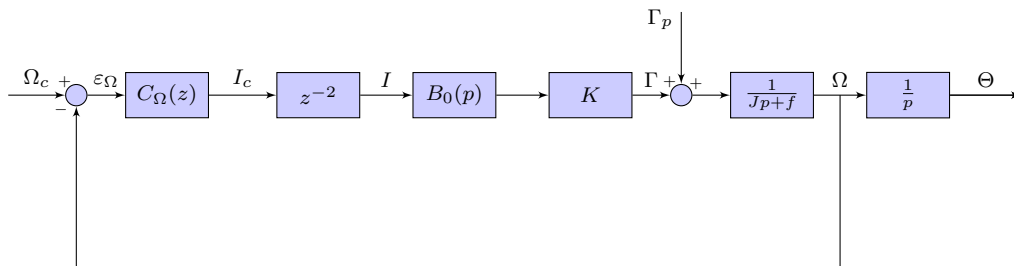


FIGURE B.9 – Asservissement numérique de vitesse, schéma simplifié.

1. Montrer que le schéma bloc de la figure B.8 peut se réduire au schéma B.9.

2. Déterminer la fonction de transfert  $G_{\Omega}(z)$  qui lie la vitesse  $\Omega(z)$  à la consigne de courant  $I_c(z)$ .
3. Déterminer un correcteur  $C_{\Omega}(z)$ , tel que :
  - la constante de temps du système en boucle fermée soit trois fois plus petite que la constante de temps en boucle ouverte,
  - l'erreur statique soit nulle, y compris en présence de perturbations  $\Gamma_p$  en échelon.

### B.7.3 Boucle de position

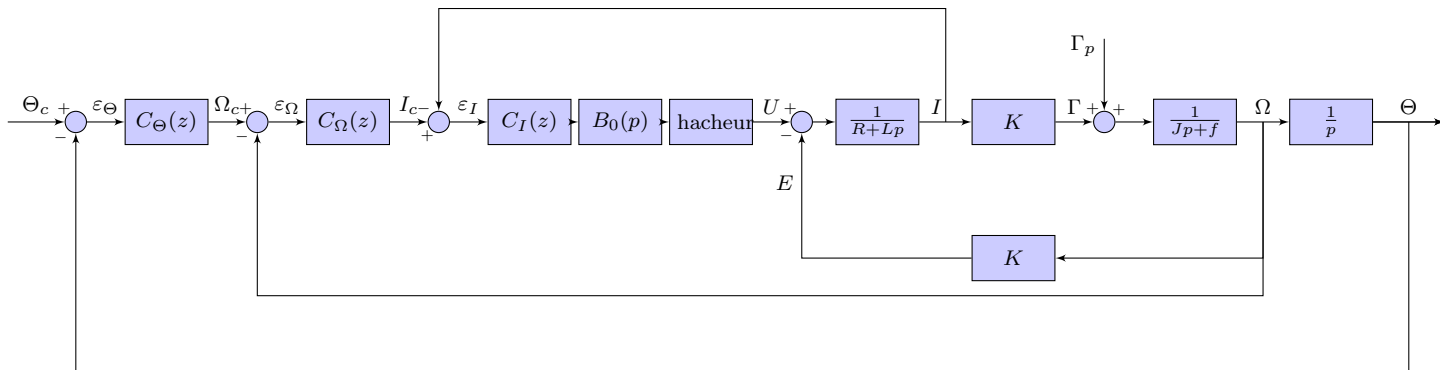


FIGURE B.10 – Asservissement numérique de position.

1. Les deux correcteur précédents étant en place, déterminer la fonction de transfert entre l'entrée de consigne de vitesse  $\Omega_c(z)$  et la position de la machine  $\Theta(z)$ .
2. On désire commander la position par un échelon commande, déterminer un correcteur  $C_p(z)$  tel que l'erreur statique soit nulle.

### B.7.4 Equation récurrente du correcteur

1. Déterminer l'algorithme implanté dans le calculateur qui réalise les trois boucles imbriquée précédemment déterminées.

---

**Pour aller plus loin :** Reprendre les synthèses précédentes en utilisant :

- Une synthèse à temps d'établissement minimum pour synthétiser  $C_I(z)$ .
  - Une synthèse de type réponse pile pour synthétiser  $C_{\Omega}(z)$ .
  - Une synthèse type PID Ziegler-Nichols + transformée bilinéaire pour  $C_p(z)$
-



# Annexe C

## Annales

1<sup>ère</sup> année  
Juin 2006

### Devoir personnel

Tous documents autorisés

Ce devoir est l'étude d'un système instable qu'il faut rendre très rapide  
Vous avez le choix des armes, Matlab, Mathematica, Maple, binôme ... Mais comprenez ce que vous faites!  
Rédaction manuscrite obligatoire.

## 1 Continu

La fonction de transfert  $G(p)$  est telle que :

$$G(p) = \frac{-0.2416p + 2.133}{p^2 - 0.6419p - 0.03555}$$

### 1.1 En boucle ouverte

1. Ce système est-il stable ?
2. Tracer dans le plan complexe les pôles et les zéros du système.
3. Calculez la réponse indicielle du système en boucle ouverte.

### 1.2 En boucle fermée

1. Le correcteur étant un gain pur, montrer qu'il n'existe pas de gain tel que le système soit stable.
2. Comment peut-on le vérifier avec Matlab ?

## 2 Echantillonné

### 2.1 Echantillonnage

On choisit d'échantillonner le système à une fréquence de 1 Hz.

1. Que pensez vous de ce choix ?
2. Calculez la fonction de transfert en  $z$  de ce système en  $y$  introduisant un bloqueur d'ordre 0.

## 2.2 Correcteur en temps d'établissement minimal

1. Calculez le correcteur série qui minimise le temps d'établissement pour une entrée en échelon.
2. Le correcteur obtenu est-il "en temps d'établissement minimal" ou "en temps d'établissement minimal absolu".
3. En utilisant le critère de Jury, vérifier que le système bouclé est stable.
4. Calculer l'erreur statique et l'erreur de traînage (respectivement à une entrée en échelon puis en rampe)
5. Déterminer l'équation récurrente de ce correcteur.

## 2.3 Correcteur à réponse pile

1. Calculez le correcteur série qui donne une réponse "pile" pour une entrée en échelon.
2. Rappelez brièvement le point commun avec le correcteur précédent et la différence fondamentale.
3. En utilisant le critère de Jury, vérifier que le système bouclé est stable.
4. Calculer l'erreur statique et l'erreur de traînage (respectivement à un entrée en échelon puis en rampe)
5. Déterminer l'équation récurrente de ce correcteur.

## 2.4 Comparaison

1. Comparez les deux correcteur précédents en fonction de critères que je vous laisse apprécier.



## Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 3h

Cet examen se décompose en quatre parties indépendantes, le barème est purement indicatif. Conseil : limitez la précision de vos résultats à  $10^{-3}$ .

### 1 Exercice 1 (4 pts, 30 mn)

La fonction de transfert  $G(z)$  est telle que :

$$G(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}{(1 + 1.5z^{-1} - 0.81z^{-2} - 1.215z^{-3})}$$

1. En utilisant le critère de Jury, déterminez si le système est stable en boucle ouverte.
2. L'un de pôles de  $G(z)$  est en 0.9, déterminez les autres pôles du système.

On choisit un correcteur de la forme :

$$C(z) = K \frac{(1 - az^{-1})(1 - \alpha z^{-1})}{(1 - bz^{-1})(1 - \beta z^{-1})}$$

3. Choisissez  $a$  et  $b$  de façon à compenser respectivement un pôle et un zéro du système. Une explication claire est demandée.
4. Choisissez  $\beta$  pour avoir une erreur statique nulle.
5. Choisissez  $K$  et  $\alpha$  pour fixer une dynamique convenable.
6. Donnez l'équation récurrente du correcteur.

### 2 Exercice 2 (5 pts, 30 mn)

La fonction de transfert  $G(p)$  est telle que :

$$G(p) = \frac{p - 1}{(p + 1)(p + 2)}$$

1. L'objectif étant de rendre le système environ 3 fois plus rapide en boucle fermée qu'en boucle ouverte, proposez une période d'échantillonnage.
2. Quel que soit le résultat de la question précédente, calculez  $G(z)$  la fonction de transfert du système échantillonné précédé d'un bloqueur d'ordre 0 en prenant  $T_e = 1$ s.
3. Déterminez un correcteur par la méthode de Zdan tel que :
  - le système présente une erreur permanente nulle pour une entrée en rampe
  - Le système en boucle fermée se comporte comme un système du troisième ordre possédant 3 pôles en 0.5.
  - Aide : démarrez la résolution en prenant  $\Delta_1(z) = k_c(1 + \alpha_1 z^{-1})$  et  $\Delta_2(z) = 1 + \beta_1 z^{-1}$
4. Vérifiez la stabilité et la causalité du correcteur obtenu.
5. Vérifiez que le système présente bien une erreur statique nulle pour une entrée en échelon.
6. Sans calcul, dites pourquoi les caractéristiques du système en boucle fermée sont assez éloignées du cahier des charges posé.

### 3 Exercice 3 (3 pts, 30 mn)

La production d'une machine est modélisable par une équation récurrente de la forme :

$$y_{k+2} - 0.9y_{k+1} + 0.2y_k = u_k$$

où :

- $y_{k+1}$  : pièces produites au jour  $k + 1$
- $y_k$  : pièces produites au jour  $k$
- $u_k$  : commande, en pièces à produire au jour  $k$
- $a$  : constante réelle

1. Calculez  $H(z)$  la transformée en  $z$  du système décrit précédemment.
2. Calculez la réponse indicielle  $y_h^*(kT_e)$  de ce système.
3. Calculez la réponse impulsionnelle  $y_\delta^*(kT_e)$ .  
Supposons que la commande est de type échelon  $A * U(kT_e)$ ,
4. Quelle amplitude  $A$  faut-il appliquer pour que l'ilot produise exactement 1000 pièces en 5 jours ?

### 4 Problème (8 pts, 1h30)

Afin d'étudier la mécanique de la rupture de matériaux composites, on utilise le mécanisme suivant. En l'absence de frottements, l'énergie cinétique de la pointe est entièrement dissipée dans la propagation de la fissure. La mesure de la vitesse et celle de la longueur de la fissure permettent de comparer différents matériaux composites.

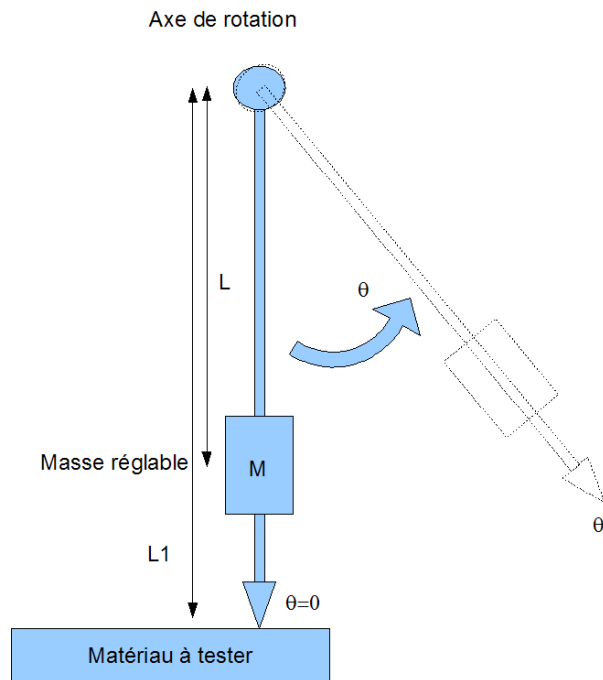


FIGURE C.1 – Impacteur, schéma de principe.

La vitesse d'impact est fonction de l'angle initial  $\theta_0$ , donc de la dextérité de l'utilisateur. Pour améliorer le système on utilise alors un moteur couple<sup>1</sup> placé sur l'axe de rotation qui permet d'asservir la vitesse d'impact. Le temps entre le démarrage et l'impact étant très court, il faut utiliser un asservissement très rapide. Au sein du problème les différentes parties sont largement indépendantes.

#### 4.1 Modélisation

Hyp : La masse est supposée ponctuelle et située à une distance  $L$  de l'axe de rotation.

1. En GB : pan-cake motor, moteur électrique à courant continu présentant un fort couple mais une faible vitesse.

1. Déterminez l'équation différentielle non linéaire du mouvement de la tige  $\theta(t)$  en fonction des paramètres  $L, M, g$  la constante de gravité terrestre et  $\Gamma$  le couple moteur.
2. En faisant l'hypothèse, classique, que  $\theta$  est petit déterminez l'équation différentielle linéaire du mouvement de la pointe.
3. Calculez la transformée de Laplace de l'équation différentielle précédente en tenant compte des conditions initiales  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ .
4. Calculez alors la fonction de transfert continue du système (angle du système vis-à-vis du couple moteur).

$$G(p) = \frac{\Theta(p)}{\Gamma(p)}$$

5. Dessinez un schéma bloc faisant apparaître la fonction de transfert  $G(p)$ , la position initiale  $\theta_0$  apparaissant comme une perturbation.

La fonction de transfert du moteur couple est :

$$H(p) = \frac{\Gamma(p)}{U(p)} = \frac{k_c}{R + L_s p}$$

$\Gamma$  : Couple moteur

$U$  : tension d'induit

où :  $k_c$  : constante de couple

$R$  : résistance d'induit

$L_s$  : Inductance série de l'induit

6. Dessinez le schéma bloc du système complet (moteur + système mécanique et perturbation).

## 4.2 Commande du couple moteur

On ne s'intéresse dans cette partie qu'à l'asservissement du couple moteur.

Un essai de pompage du courant moteur donne le résultat indiqué sur la figure C.2.

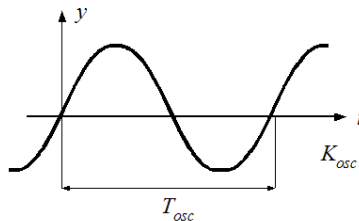


FIGURE C.2 – Phénomène de pompage du courant d'induit : oscillation obtenue pour un gain  $K_{osc} = 40$  on mesure alors  $T_{osc} = 1ms$ .

1. Déterminez les constantes  $k_p, T_i$  et  $T_d$  du correcteur PID donné ci-après pour asservir le courant dans le moteur.

$$PID(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$$

2. Déduisez-en les constantes  $k_p, T_i, T_d$  et  $\tau$  correcteur PID de la forme suivante :

$$PID(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1 + \tau p} \right)$$

3. Au vu du résultat présenté en figure C.2, calculez une période d'échantillonnage correcte pour implanter le correcteur précédent sous forme numérique. Le calcul du correcteur numérique, n'est pas demandé mais quelques explications sont les bienvenues !

### 4.3 Commande de la vitesse

Dans cette partie, la constante de temps dominante du système moteur corrigé par le PID précédent est si petite vis-à-vis des constantes de temps du système mécanique que le moteur corrigé par le PID est considéré comme un gain  $k_m$ .

1. Déterminez un correcteur à réponse pile pour une entrée en rampe.

### 4.4 Traitement du signal

Les données de vitesse et position sont enregistrées sur le calculateur pour un traitement du signal hors ligne.

1. les données, échantillonnées à  $f_e = 1$  kHz sont filtrées avec un filtre numérique de la forme :

$$F(z) = \frac{z + 2}{(z - 0.5)^2}$$

Calculez le diagramme de Bode du filtre analogique équivalent et son domaine de validité.

## Applications numériques

AN :  $k_c = 1; R = 1; L_s = 1; k_m = 1; L = 1; L_1 = 1; M = 1; g = 10$

## Devoir personnel

Ce devoir est l'étude d'une méthode de commande un peu particulière dite commande par modèle interne. Le principe n'est pas d'asservir une sortie à une consigne mais d'asservir la sortie d'un système à celle d'un modèle. Vous avez le choix des armes, Matlab, Mathematica, Maple, binôme ... Mais comprenez ce que vous faites !

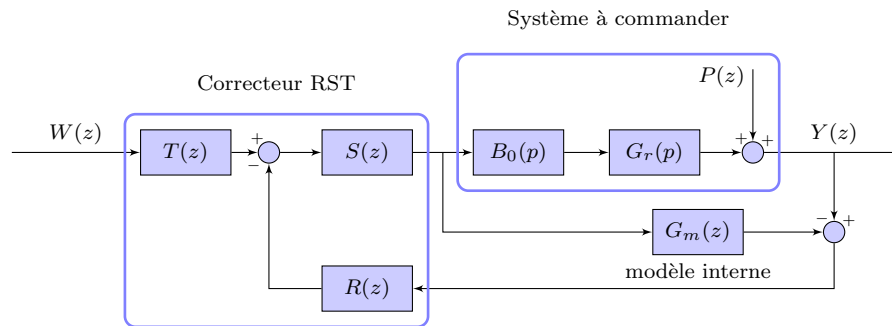


FIGURE C.3 – Schéma général d'une commande par modèle interne.

## 1 Questions

Les fonctions de transfert du système continu réel  $G_r(p)$  et celle du modèle échantillonné  $G_m(z)$  sont :

$$G_r(p) = \frac{k'}{p+1} \quad \text{et} \quad G_m(z) = \mathcal{Z} \left\{ B_0(p) \frac{k}{p+1} \right\}$$

et on choisira :

$$T(z) = R(z) = \frac{z}{z-a} \quad \text{et} \quad S(z) = H_0 = cte$$

1. Choisir une période d'échantillonnage du système.
2. Montrer que si  $k \neq k'$  il existe un gain  $H_0$  tel que l'erreur statique soit nulle malgré la perturbation en échelon.
3. A partir de maintenant, on prendra :

$$G_r(p) = \frac{1}{p+2} \quad \text{et} \quad G_m(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{2p+1} \right\}$$

et

$$T(z) \neq R(z), \quad H(z) \text{ quelconque}$$

4. Calculer la fonction de transfert globale entrée sortie du système en fonction de  $R(z)$ ,  $S(z)$ ,  $T(z)$ ,  $G_m(z)$  et  $G_r(z)$ .
5. Proposer un cahier des charges plausible pour le système en boucle fermée.
6. Déterminer les fonctions de transfert  $R(z)$ ,  $S(z)$  et  $T(z)$ , en fonction du cahier des charges.
7. Donner l'algorithme de commande.

## Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 2h

Cet examen se décompose en six parties presque indépendantes, le sujet est difficilement faisable dans le temps imparti. Ne perdez pas de temps sur une question difficile, passez à la suivante. Conseil : limitez la précision de vos résultats à  $10^{-3}$ .

Le problème posé est l'asservissement de force d'un bloc moteur du drone composé d'un moteur synchrone dit moteur "brushless", de son collecteur électronique et d'une hélice à pas variable. L'objet de cette étude est en particulier la régulation de la vitesse du moteur à 6000 tr/mn et ce, quel que soit le pas de l'hélice, la force devient alors proportionnelle au pas de l'hélice.

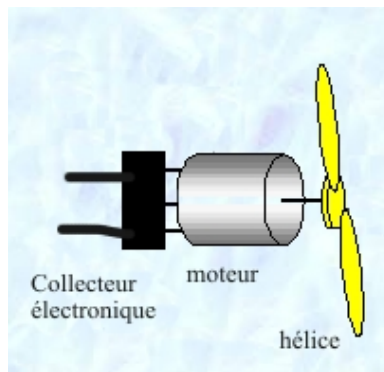


FIGURE C.4 – Système à réguler.

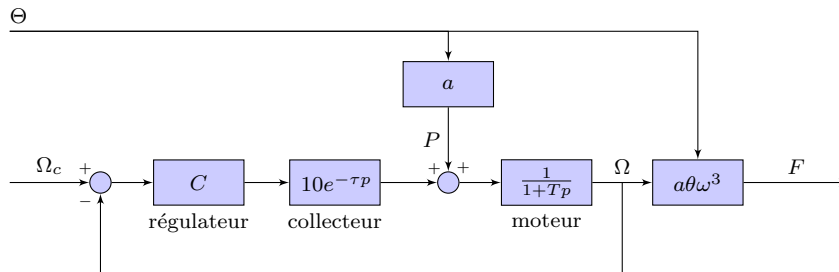


FIGURE C.5 – Schéma bloc général de l'asservissement de force.

### 1 Etude analogique

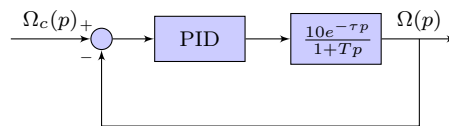


FIGURE C.6 – Schéma de l'asservissement avec un correcteur PID.

Le moteur est représenté par une constante de temps  $T = 20\text{ms}$ , le collecteur électronique lui, se comporte comme un retard pur de durée  $\tau = 5\text{ms}$ . Dans cette partie on ne prendra pas en compte l'existence d'une perturbation.

$$G(p) = \frac{10e^{-\tau p}}{1 + Tp}$$

1. Tracer la réponse indicielle de  $G(p)$ .
2. Déterminer un correcteur analogique de type PI pour l'asservissement de ce système.
3. Sans calcul mais avec une brève justification, quel sera probablement le dépassement de la sortie pour une entrée en échelon ?

## 2 Asservissement numérique

Tous comptes faits, on décide de placer un correcteur numérique. La période d'échantillonnage est :  $T_e = 5$  ms. L'objectif est d'obtenir une réponse indicielle la plus rapide possible.

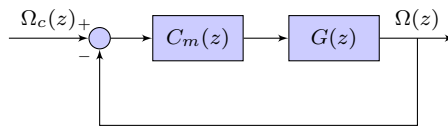


FIGURE C.7 – Système bouclé avec un correcteur de type "temps d'établissement minimal".

1. Que pensez-vous de cette période d'échantillonnage ?
2. Calculer la fonction de transfert en  $z$   $G(z)$  de l'ensemble collecteur électronique + moteur précédé d'un bloqueur d'ordre 0. ( $G(p) = \frac{10e^{-\tau p}}{1+Tp}$ )
3. Décomposer  $G(z)$  sous la forme :

$$G(z) = \frac{B^+(z)B^-(z)}{A^+(z)A^-(z)}$$

où  $B^+(z)$ ,  $A^+(z)$  sont compensables et  $B^-(z)$ ,  $A^-(z)$  ne le sont pas.

4. Expliquez pourquoi la recherche d'un correcteur donnant une boucle fermée équivalente à 1 retard pur est vouée à l'échec.
5. Calculer un correcteur  $C_m(z)$  qui donne une réponse en temps minimal. On cherche donc  $C_m(z)$  tel que :

$$\frac{C_m(z)G(z)}{1 + C_m(z)G(z)} = z^{-2}$$

6. Calculer les trois premiers échantillons de la commande du moteur c'est-à-dire de la sortie du correcteur.

## 3 Régulation numérique - Zdan

Dans cette partie, la variation de couple due au pas variable est prise en compte sous la forme d'un couple de perturbation comme indiqué sur la figure C.8.

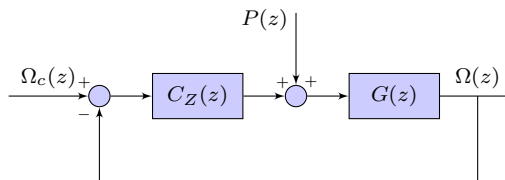


FIGURE C.8 – Modèle du système avec la perturbation due au pas variable modélisée par une rampe  $P(z)$ .

1. Calculer un correcteur  $C_Z(z)$  avec la méthode de Zdan ayant pour caractéristiques :
  - modèle en boucle fermée de type troisième ordre

$$\frac{N(z)}{(1 - 0.5z^{-1})^3}$$

- erreur statique nulle, et ce malgré la perturbation en rampe.
- On prendra pour la partie  $C_3$  du correcteur de Zdan la forme :

$$C_3(z) = \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_2(z)} = \frac{K(1 - z_1 z^{-1})}{1 - z_2 z^{-1}}$$

2. Calculer l'erreur permanente de votre système corrigé en l'absence de perturbation.
3. Vérifier la stabilité de votre correcteur.
4. Calculer l'équation récurrente de votre correcteur et vérifier la causalité de ce correcteur.

## 4 Régulation numérique - Commande par anticipation

Afin de diminuer le dépassement obtenu par le correcteur précédent, on se propose d'implanter une commande par anticipation.

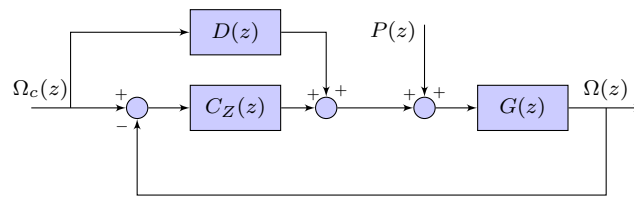


FIGURE C.9 – Commande par anticipation.

Le correcteur  $D(z)$  sera choisi presque identique à  $C_Z(z)$  de la forme :

$$C_Z(z) = C_1(z)C_2(z)C_3(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^n} \frac{A^+(z)}{B^+(z)} \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_2(z)}$$

$$D(z) = C_1(z)C_2(z)C'_3(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^n} \frac{A^+(z)}{B^+(z)} \frac{\Delta'_1(z)}{\Delta_2(z)}$$

1. Montrez que  $\Delta'_1(z)$  n'influe que sur les zéros de la boucle fermée.
2. Calculez  $\Delta_1(z)$ ,  $\Delta_2(z)$  et  $\Delta'_1(z)$  tels que la transmittance en boucle fermée soit exactement égale à  $\frac{z^{-2}}{(1-0.5z^{-1})^3}$ . Aide : reprenez la solution de la question 3.1
3. Calculer les trois polynômes  $R(z)$ ,  $S(z)$  et  $T(z)$  d'un correcteur RST qui permettra d'obtenir exactement la même dynamique que la commande par anticipation en boucle fermée.

## 5 Asservissement de force

La relation force verticale en fonction de la vitesse du moteur  $\omega$  et du pas  $\theta$  est supposée de la forme :

$$F = a\theta\omega^3$$

Application numérique :  $F_0 = 1$  N pour  $\theta_0 = 10^\circ$  et  $\omega_0 = 6000$  tr/mn

1. Déterminer  $a$ .
2. Donner un modèle linéarisé de la force autour de sa valeur nominale  $F_0 = a\theta_0\omega_0^3$  de la forme  $F = F_0 + \alpha\theta + \beta\omega$  par développement limité.
3. Donner un schéma bloc du système complet incluant la force.
4. Déterminer la fonction de transfert entre la commande de pas et la sortie en force, le système étant régulé par la commande par anticipation.
5. Le pas et la vitesse étant quantifiés par des CAN de 8 bits, soit  $2^8$  pas de quantification entre 0 et 8000 tr/mn et entre  $\pm 45^\circ$ , quelle est l'erreur de force en régime établi ?



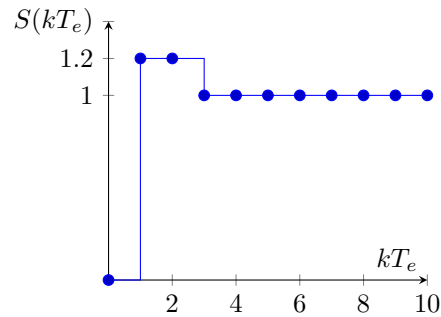


FIGURE C.10 – Réponse indicielle désirée.

## 6 Questions indépendantes pour ceux qui finissent trop tôt

1. Calculer la transformée en  $z$  du signal donné en figure C.10.
2. Soit  $H(z)$  une transmittance opérationnelle d'un système qui soumise à un échelon unité présente en sortie la réponse présentée en figure C.10. Calculer  $H(z)$ .
3. Le système représenté par :

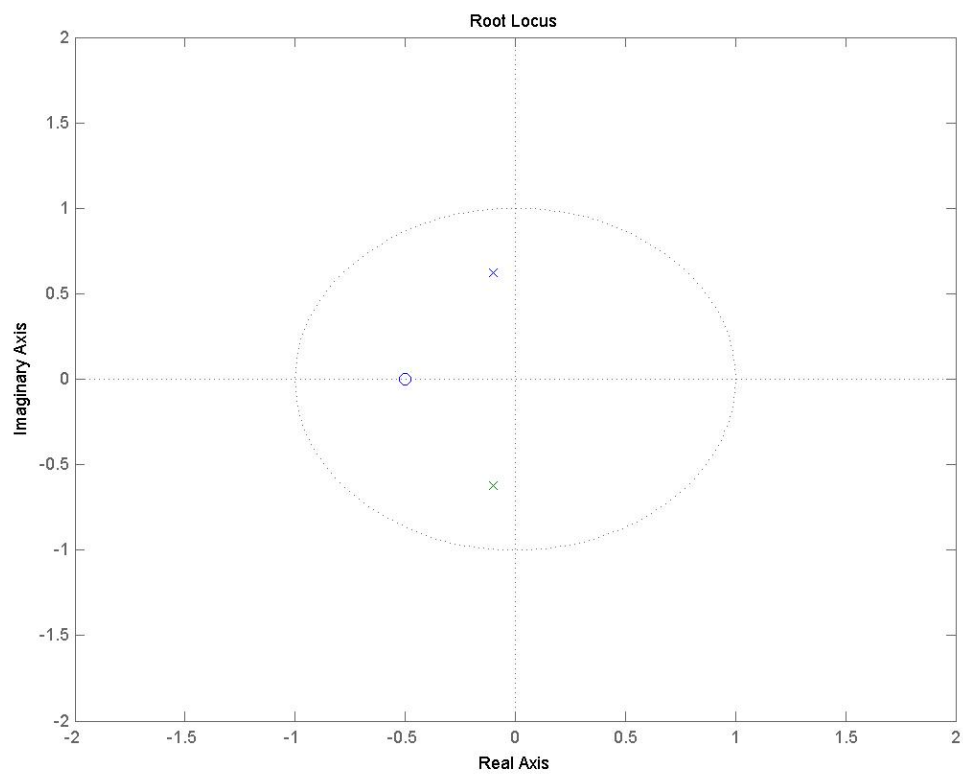
$$D(z) = \frac{z + 3}{z^3 + 1.2z^2 - .25z - 0.3}$$

est-il stable ?

4. Tracer intuitivement le lieu d'Evans de la fonction de transfert suivante :

$$F(z) = \frac{z + 0.5}{z^2 + 0.2z + 0.4}$$

dont les pôles et le zéro sont représentés sur la figure C.11.

FIGURE C.11 – Pôles et zéros de  $F(z)$ .

## Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 2h

Le problème posé est la régulation de fréquence d'un oscillateur ultra-stable à 7 GHz. Embarqué sur un satellite, cet oscillateur dérive dans le temps en fonction des variations de température du saphir. On s'attachera à la réalisation de deux régulateurs indépendants : une régulation analogique de phase qui corrige la fréquence et une régulation numérique de température. Ces deux signaux sont traduits en une tension continue par un capteur approprié.

### 1 Régulation analogique de phase

Il s'agit ici de déterminer un correcteur analogique qui agit sur la phase de la fréquence de 7 GHz ultra-stable. la transmittance entre la phase et la fréquence est  $H(p)$ .

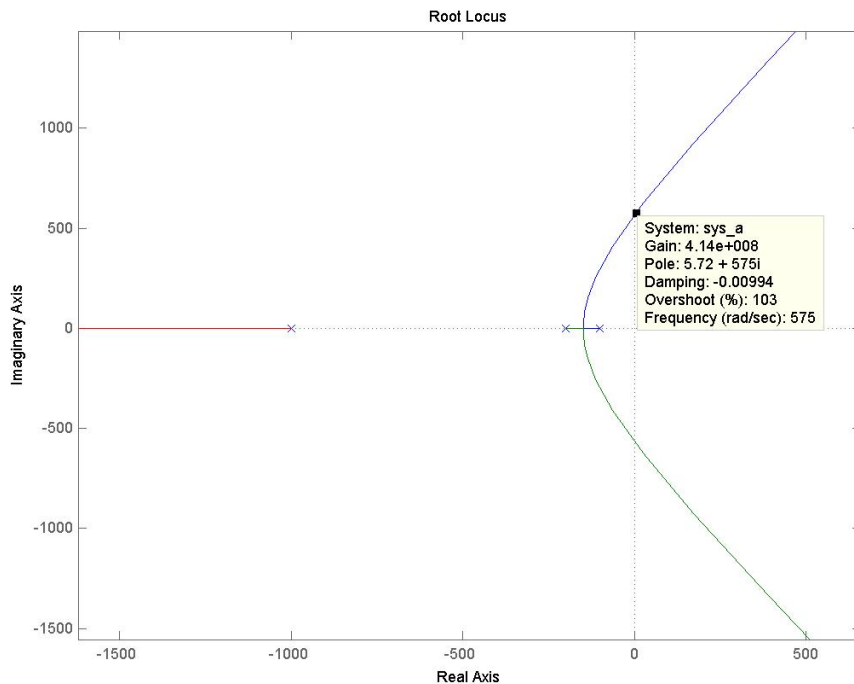


FIGURE C.12 – Lieu d'Evans du système.

1. Le lieu d'Evans du système  $H(p) = \frac{S(p)}{U(p)}$  est donné en figure C.12. En déduire un correcteur analogique de type PI de Ziegler-Nichols.
2. Le diagramme de Bode du système formé du correcteur PI calculé précédemment suivi de la transmittance  $H(p)$  (voir fig. C.14) est donné en figure C.14 (un zoom est donné en figure C.15). Mesurez la marge de phase  $\Delta\phi$  et la marge de gain  $\Delta G$ .

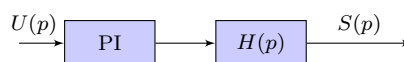


FIGURE C.13 – Système précédé du correcteur PI.

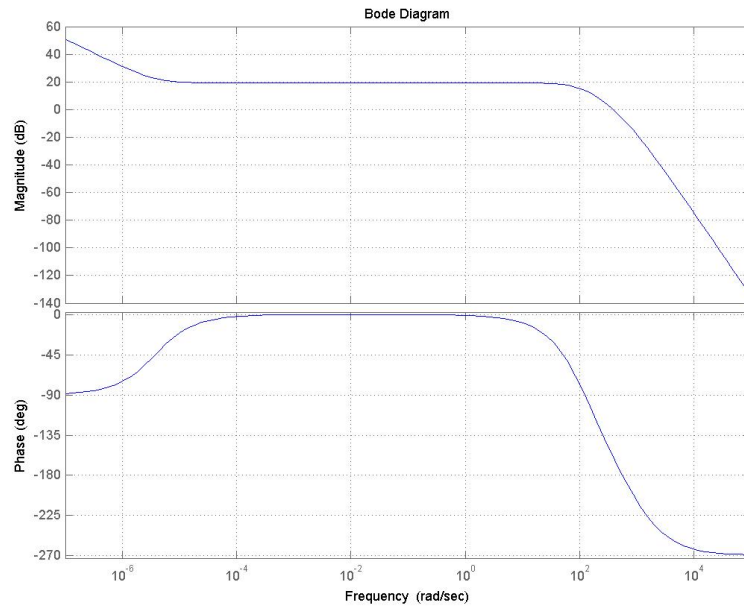


FIGURE C.14 – Diagramme de Bode du système présenté en figure C.13.

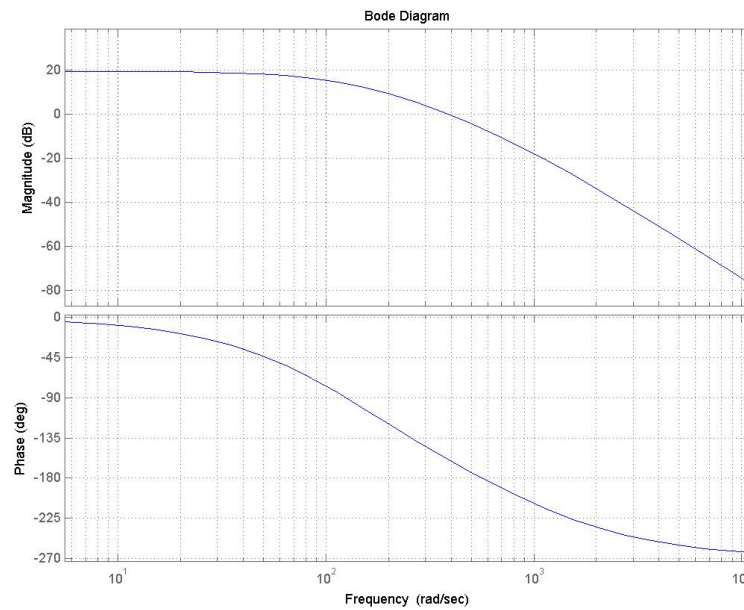


FIGURE C.15 – Diagramme de Bode du système présenté en figure C.13 (zoom sur la zone critique).

3. Le système bouclé par un retour unitaire et corrigé par le correcteur déterminé précédemment présente une réponse indicielle ayant trop de dépassement. On se propose de baisser la gain pour le rendre moins rapide. Calculez le nouveau gain du correcteur PI afin d'avoir une marge de phase de 90 degrés ( $T_i$  reste identique).
4. Au vu de votre expérience, quel type de réponse indicielle devrait-on avoir avec un telle marge de phase ?

## 2 Transposition du régulateur analogique

1. Tout comptes faits, on décide d'implanter le correcteur analogique calculé précédemment sur un calculateur numérique. Rappelez en deux lignes les principaux avantages du régulateur numérique sur sa version analogique.
2. Calculez un correcteur numérique par la méthode de votre choix que vous justifierez.
3. Choisissez la période d'échantillonnage maximum pour éviter le phénomène de recouvrement de spectre en faisant l'hypothèse que le spectre du signal est limité à  $10^4 \text{ rad.s}^{-1}$ .

## 3 Régulation numérique de température

**Description du système** Ce saphir, de très haut facteur de qualité, est posé dans une enceinte isolée thermiquement. Afin d'éviter tout choc thermique, la dynamique d'asservissement est choisie très lente. Une fois dans l'espace, le saphir met plusieurs heures à atteindre sa température de fonctionnement. Deux types de perturbation apparaissent :

- $V(z)$  en entrée du système représente les variations de température dues aux dérives de l'électronique et sont modélisées par une rampe.
- $P(z)$  en sortie représente l'influence du soleil sur le satellite. Elle est représentée par une perturbation sinusoïdale.

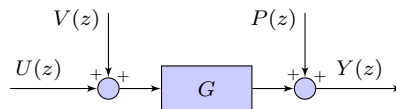


FIGURE C.16 – Schéma bloc de la fonction de transfert entre la température de sortie  $Y$  et la puissance d'entrée  $U$  en présence des perturbations  $V$  et  $P$ .  $V$  est une perturbation de charge de type rampe,  $P$  est une perturbation de sortie de type sinusoïdal.

### Cahier des charges

- L'erreur permanente d'ordre 0 (réponse à l'échelon d'entrée  $W(z)$ ) doit être nulle et ce, y compris en cas de perturbations  $V(z)$  en forme de rampe.
- Le système en boucle fermée doit rejeter les perturbations sinusoïdales  $P(z)$ .
- Le système doit répondre très lentement à un échelon de consigne  $W(z)$ , le comportement en boucle fermée est plus lent qu'en boucle ouverte ! On désire un comportement de type premier ordre, la constante de temps est de 5 heures soit 18000 secondes.

### 3.1 Modélisation

**Modélisation du système en boucle ouverte sans perturbations** La température du saphir au cours du temps est mesurée après avoir soumis le système à un échelon de puissance thermique. Le résultat est donné figure C.17.

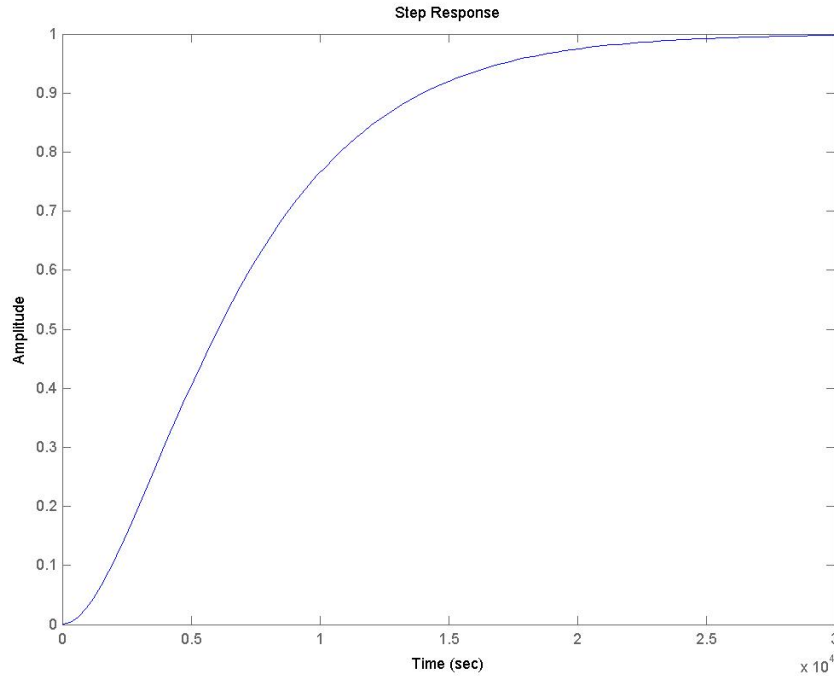


FIGURE C.17 – Réponse de la température du saphir en fonction d'un échelon unitaire de puissance.

1. On fait l'hypothèse que la transmittance du système est de la forme :

$$G(p) = \frac{k}{(1 + \tau p)^2}$$

Près avoir donné la réponse temporelle  $s(t)$  de  $G(p)$  soumise à un échelon unité, déterminez graphiquement les valeurs de  $k$  et  $\tau$ .

2. Déterminez la transformée en  $z$  de la transmittance  $G(p)$  précédée d'un bloqueur d'ordre 0 échantillonnée avec une période  $T_e = \tau/5$ .

#### Modélisation du système voulu en boucle fermée

1. Proposez une transmittance continue (en  $p$ ), répondant au cahier des charges.
2. Déterminez la fonction de transfert du modèle  $M(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$  qui est la transformée en  $z$  de votre modèle analogique précédé par un bloqueur d'ordre 0.

Premier correcteur

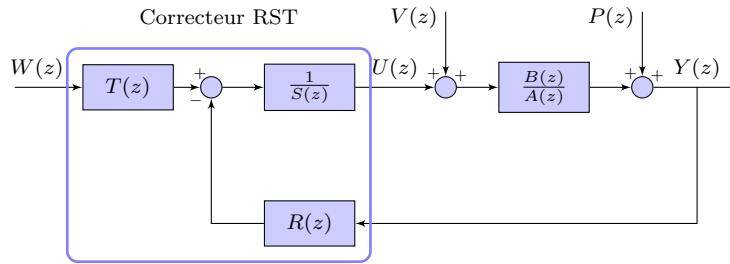


FIGURE C.18 – Principe de correction par correcteur RST.  $V(z)$  est une perturbation de charge de type rampe,  $P(z)$  est une perturbation de sortie de type sinusoïdal.

Quel que soit le résultat de la partie précédente, vous continuerez avec la fonction de transfert en  $z$

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.01752z + 0.01534}{z^2 - 1.637z + 0.6703}$$

Dans cette partie on ne tiendra pas compte de la perturbation sinusoïdale  $P(z)$ .

1. Décomposez  $G(z)$  sous la forme :

$$G(z) = \frac{B^+(z)B^-(z)}{A^+(z)A^-(z)}$$

où  $B^+(z), A^+(z)$  sont compensables et  $B^-(z), A^-(z)$  ne le sont pas.

2. On décompose le polynôme  $S(z)$  en un produit de trois polynômes :
  - $S_1(z)$  contient le nombre d'intégrateurs purs nécessaires pour répondre au cahier des charges,
  - $S_2(z)$  compense les zéros compensables de  $B(z)$ ,
  - $S_3(z)$  assurera la dynamique voulue en boucle fermée.

Donnez les polynômes  $S_1(z)$  et  $S_2(z)$ .

3. Déterminez  $S_3(z)$  et  $R(z)$  tels que la transmittance du système en boucle fermée soit égale à celle du modèle de comportement voulu  $M(z)$ .

4. Calculez l'erreur permanente de votre système corrigé en l'absence de perturbation.

le correcteur RST est finalement implanté sous la forme donnée en figure C.19.

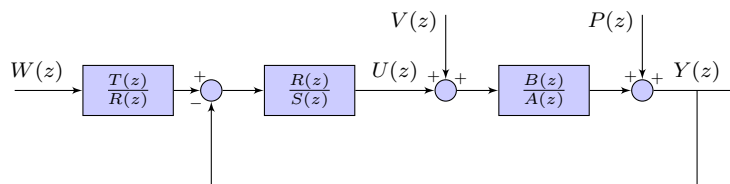


FIGURE C.19 – Implantation du correcteur RST.

5. Vérifiez la stabilité du correcteur  $C(z) = \frac{R(z)}{S(z)} = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)}$ .
6. Calculez l'équation récurrente de votre correcteur et vérifiez la causalité de ce correcteur.
7. En utilisant le théorème de la valeur finale, déterminez la valeur de la commande en régime permanent  $U_\infty$ , le système étant soumis à un échelon d'entrée, les perturbations étant nulles.

Correcteur réjecteur de la perturbation sinusoïdale

Ce générateur de fréquence est embarqué sur un satellite qui tourne autour de la terre en 90 minutes. Le capteur de température subit alors une perturbation sinusoïdale de période  $T = 90mn$ . On se propose ici de recalculer un nouveau correcteur qui rejette asymptotiquement cette perturbation.

1. En reprenant le schéma C.18, Calculez la fonction de transfert  $G_p(z) = \frac{Y(z)}{P(z)}$  en fonction des paramètres du système et en introduisant le polynôme d'observation  $A_0$ .

2. Calculez la pulsation  $\omega$  du signal de perturbation puis calculez la transformée en  $z$  du signal sinusoidal  $p(t) = \sin(\omega t)$  échantillonné à la période  $Te$ .
3. Calculez alors le signal  $Y(z)$  en fonction de ce signal  $P(z)$ , tous les autres signaux entrants étant nuls.
4. Proposez une condition sur les polynômes  $S$  et sur  $A_0$  afin que la sortie  $Y(z)$  ne dépende plus du signal sinusoidal.
5. Calculez le correcteur RST qui répond au cahier des charges complet.



## Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 2h

Le problème posé est le positionnement d'un télescope sur monture azimutale. On ne s'occupera dans ce sujet que de la partie réglage de l'azimut. Dans la phase de "mise en station" (recherche de deux étoiles bien connues) et de pointage vers un objet précis (planète, nébuleuse, comète ...), le télescope sera asservi par un correcteur de type Zdan. L'objet étant visualisé, la poursuite de cet objet sera réalisée par un correcteur de type "réponse pile". Le passage d'un correcteur à l'autre ne sera pas étudié.



FIGURE C.20 – Télescope à monture azimutale.

### 1 Modélisation

Le mouvement du télescope est décrit par l'équation différentielle suivante

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = \Gamma_c + \Gamma_p$$

avec :

- $J$  : L'inertie de l'ensemble moteur + parabole
- $\theta$  : la position angulaire de l'antenne
- $B$  : le coefficient de frottement visqueux
- $\Gamma_c$  : le couple moteur
- $\Gamma_p$  : le couple de perturbation

1. Déterminer la transformée de Laplace de cette équation différentielle en supposant les conditions initiales nulles.
2. Donner le schéma bloc de ce système. On posera pour simplifier l'écriture :  $B/J = a$ ,  $\Gamma_c/B = u$  et  $\Gamma_p/B = w$ .
3. En faisant l'hypothèse que  $\Gamma_p = 0$ , déterminer la fonction de transfert continue  $G(p) = \frac{\theta(p)}{u(p)}$  de ce système.
4. Tracer à main levée, la forme générale du diagramme de Bode asymptotique de  $G(p)$  en module et en phase.
5. En déduire le diagramme de Nyquist. Ce système peut-il devenir instable si on le boucle par un gain (voir figure C.21) ?
6. Déterminer la fonction de transfert échantillonnée  $G(z)$  de ce système précédé d'un bloqueur d'ordre 0.

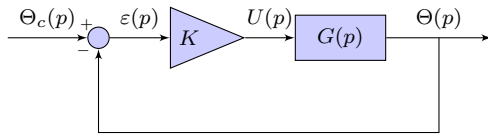


FIGURE C.21 – Système bouclé sans bloqueur d'ordre 0

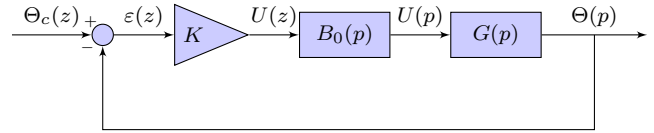


FIGURE C.22 – Système bouclé avec un bloqueur d'ordre 0

## 2 Régulation numérique : correcteur PI

Avec  $a = 10$ , en prenant une période d'échantillonnage  $Te = 20$  ms et en bouclant par un retour unitaire le système précédé par un bloqueur d'ordre 0 et un gain  $K = 100$  (voir figure C.22), l'ensemble se met à osciller à une fréquence de 5 Hz sans quitter le domaine de linéarité.

1. Au vu du résultat précédent, proposer un correcteur de type PI numérique qui donne de "bons" résultats.
2. Donner alors le schéma bloc de ce correcteur PI.

## 3 Régulation numérique : phase de mise en station

Quel que soit le résultat de la partie précédente, vous continuerez avec la fonction de transfert en  $z$

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.001873z + 0.001752}{(z-1)(z-0.8173)}$$

### 3.1 Réglage de base

1. Décomposez  $G(z)$  sous la forme :

$$G(z) = \frac{B^+(z)B^-(z)}{(1-z^{-1})^m A^+(z)A^-(z)}$$

où  $B^+(z), A^+(z)$  sont compensables et  $B^-(z), A^-(z)$  ne le sont pas.

2. On décompose le correcteur  $C(z)$  en un produit de trois correcteurs :
  - $C_1(z)$  contient le nombre d'intégrateurs purs nécessaires pour obtenir une erreur statique nulle en présence d'un couple de perturbation  $\Gamma_c$  de type échelon
  - $C_2(z)$  compense les pôles et zéros compensables de  $G(z)$ , (rappel : on ne compense pas  $\frac{1}{(1-z^{-1})^m}$ )
  - $C_3(z)$  assurera la dynamique voulue en boucle fermée.

Donnez les polynômes  $C_1(z)$  et  $C_2(z)$ .

3. Déterminez  $C_3(z) = \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_2(z)}$  tel que le système corrigé, bouclé, possède une dynamique identique à celle d'un système continu du second ordre de pulsation  $\omega_n = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et de facteur d'amortissement  $\xi = 0.707$ . La période d'échantillonnage  $T_e$  sera choisie égale à 0.2 secondes.  
Aide : s'il n'y a pas d'erreur  $\Delta_1(z) = \alpha + \beta z^{-1}$  et  $\Delta_2(z) = \gamma$
4. Vérifier, par le calcul, que l'erreur statique de ce système est nulle y compris en présence d'une perturbation.
5. Presque sans calcul, quelle est l'erreur permanente de vitesse en l'absence de perturbation.

### 3.2 Réglage avancé

On souhaite dans cette partie améliorer le comportement dynamique du système en boucle fermée en choisissant un réglage qui impose une erreur permanente d'accélération  $\varepsilon_a(\infty)$  non nulle mais aussi faible que l'on veut. Dans notre cas on choisira  $\varepsilon_a(\infty) = 0.1$ . Le correcteur proposé est de la forme :  $C(z) = C_1(z) \times C_2(z) \times D_3(z)$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont ceux déterminés précédemment et  $D_3$  est de la forme<sup>2</sup> :

$$D_3 = \frac{\Delta_1(z) + (1-z^{-1})^2 \times M(z)}{\Delta_2(z) - M(z)}$$

2. Attention cette forme est particulière pour ce système, ce n'est pas généralisable.

avec  $\Delta_1(z)$  et  $\Delta_2(z)$  calculés précédemment.

1. Donnez la transformée en  $z$  d'un signal de type parabolique.
2. En prenant  $M(z) = cte = m_0$ , montrer que l'erreur d'accélération du système en boucle fermée dépend de  $m_0$ .
3. Calculer  $m_0$  tel que  $\varepsilon_a(\infty) = 0.1$ .

## 4 Régulation numérique : phase de poursuite

Dans cette phase, l'asservissement est assuré par un correcteur de type "réponse pile".

1. Est-il possible de calculer un correcteur à réponse pile pour une entrée de type rampe pour ce système ? Est-ce faisable pour une entrée de type parabole ?
2. Déterminer un correcteur à réponse pile pour une entrée de type rampe.  
Aide : s'il n'y a pas d'erreur  $L(z) = \alpha + \beta z^{-1}$  et  $K(z) = \gamma + \xi z^{-1}$  (notations du cours)
3. En utilisant le théorème de la valeur finale, calculer l'erreur permanente de vitesse (entrée de type rampe).
4. Calculer l'équation récurrente de votre correcteur et vérifier la causalité de ce correcteur.

## Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 1h

Le problème posé est l'asservissement d'une micropompe injectant un médicament à travers la peau. L'objectif est de conserver la même concentration de médicament dans le corps malgré la dénaturation par le foie du médicament. Le système est composé d'une pompe et d'un capteur capable de donner la concentration de médicament.

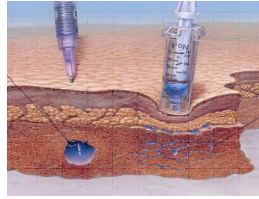


FIGURE C.23 – Injection intramusculaire.

### 1 Modélisation

La diffusion du médicament dans le muscle puis dans le corps suivent une loi de type, loi de Fick, la composition des deux lois, après simplification, donne :

$$J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + C\theta(t) = D_p(t) + A_c(t)$$

avec :

- $J$  : inertie de l'ensemble peau + corps
- $\theta$  : concentration de médicament dans le corps
- $B$  : coefficient de diffusion
- $C$  : coefficient de pertes
- $A_c$  : assimilation par le corps (équivalent à un débit)
- $D_p$  : débit de la pompe

Applications numériques :  $J = 64800$ ,  $B = 21.6$ ,  $C = 10^{-3}$

1. Déterminer la transformée de Laplace de cette équation différentielle en supposant les conditions initiales nulles.
2. Donner le schéma bloc de ce système.
3. En faisant l'hypothèse que  $A_c(t) = 0$ , déterminer la fonction de transfert continue  $G(p) = \frac{\Theta(p)}{D_p(p)}$  de ce système.
4. Tracer à main levée, la forme générale du diagramme de Bode asymptotique de  $G(p)$  en module et en phase. On donnera quelques points remarquables.
5. A l'aide du critère de Routh, déterminer le gain maximal  $k$  avant oscillation du système bouclé par un intégrateur pur ( $k/p$ ) (voir figure C.24).
6. Montrez qu'à la limite d'oscillation la période d'oscillation est :

$$T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$$

7. Des deux dernières questions, en déduire un correcteur PI de type Ziegler-Nichols pour le système  $H(p) = \frac{G(p)}{p}$ .

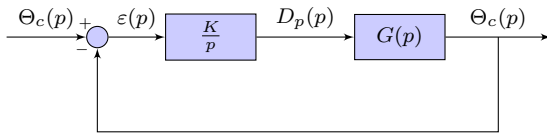


FIGURE C.24 – Système continu bouclé avec un intégrateur pur.

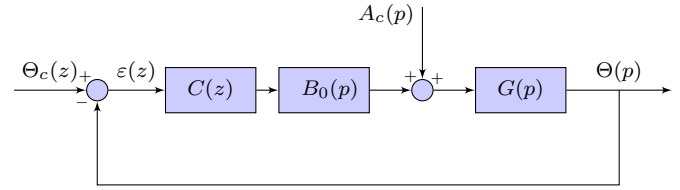


FIGURE C.25 – Système corrigé par un correcteur numérique.

## 2 Régulation numérique

1. En prenant une période d'échantillonnage  $Te = 15$  mn, déterminer la fonction de transfert échantillonnée  $G(z)$  de ce système précédé d'un bloqueur d'ordre 0.

$$G(p) = \frac{D_p(p)}{\Theta(p)} = \frac{1}{Jp^2 + Bp + C}$$

2. En utilisant le critère de Jury, déterminer le gain maximal  $k$  avant oscillation du système bouclé par un intégrateur pur  $(\frac{k}{1-z^{-1}})$ .
3. La perturbation  $A_c(t)$  est modélisée par une rampe ( $A_c(t) = \alpha \times t$ ), combien faut-il d'intégrateurs purs dans le correcteur pour avoir une erreur permanente nulle vis-à-vis de la consigne en présence de la perturbation.
4. En posant :

$$C(z) = K \frac{(1 - b_0 z^{-1})(1 - b_1 z^{-1})(1 - b_2 z^{-1})}{(1 - z^{-1})^l (1 - a_0 z^{-1})}$$

$l$  étant le nombre d'intégrateurs purs déterminés précédemment. Déterminer  $K$  et les  $a_i, b_i$  tels que le système en boucle fermée présente un dénominateur unité.

5. Vérifier que le correcteur est bien stable et causal.
6. Tracer la réponse impulsionnelle du système en boucle fermée corrigé par le correcteur déterminé précédemment.

## Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 1h

Le problème posé est l'asservissement de vitesse d'une hélice d'avion de modèle réduit.

### 1 Modélisation

Le couple du moteur électrique est donné par la relation :

$$\Gamma(t) = a.u(t)$$

La vitesse de rotation de l'hélice est donnée par :

$$J\dot{\omega}(t) = \Gamma(t) + C(t)$$

Le capteur de vitesse (génératrice tachymétrique) donne une information sous la forme d'une tension :

$$u_m(t) + \tau \frac{du_m}{dt} = \omega(t)$$

avec :

$J$	: inertie de l'hélice
$\Gamma$	: le couple moteur
$a$	: constante positive
$u(t)$	: tension du moteur
$C(t)$	: couple perturbateur
$\omega(t)$	: vitesse de rotation de l'hélice
$\tau$	: constante de temps du capteur de vitesse
$u_m(t)$	: tension de la génératrice tachymétrique moteur

Applications numériques :  $J = 24.10^{-4}$  kg.m<sup>2</sup>,  $a = 0.284$  N.m/V,  $\tau = 10.10^{-3}$ s

- Déterminer les transformées de Laplace de ces équations en supposant les conditions initiales nulles.

$$\Gamma(p) = a.u(p)$$

La vitesse de rotation de l'hélice est donnée par :

$$Jp\omega(p) = \Gamma(p) + C(p)$$

Le capteur de vitesse (génératrice tachymétrique) donne une information sous la forme d'une tension :

$$u_m(p) + \tau p u_m(p) = \omega(p), \quad \text{soit} \quad \frac{u_m(p)}{\omega(p)} = \frac{1}{1 + \tau p}$$

- Donner le schéma bloc de ce système en faisant apparaître les variables  $\Omega$ ,  $u_m$ ,  $\Gamma$ ,  $u$  et  $C$ .

## 2 Correction proportionnelle

Dans cette partie nous ferons l'hypothèse que le moteur est commandé par une tension  $u(t)$  telle que :

$$u(t) = k_p(\Omega_{ref} - u_m)$$

1. Donner le schéma bloc en boucle fermée.
2. Déterminer à l'aide du critère de Routh, la plage de valeurs de  $k_p$  tel que le système soit stable. En boucle fermée la fonction de transfert est :

$$B0(p) = \frac{a}{Jp} \frac{1}{1 + \tau p}$$

$$BF(p) = \frac{k_p a}{k_p a + Jp(1 + \tau p)} = \frac{k_p a}{J\tau p^2 + Jp + k_p a}$$

Tableau de Routh

$p^2$	$J\tau$	$k_p a$	0
$p^1$	$J$	0	0
$p^0$	$Jk_p a$		

La seule condition est que  $k_p$  soit positif.

3. On suppose que le couple de perturbation est nul et que  $k_p = 1$ , dessiner la réponse à un échelon de tension  $u(t) = 10V$ . On précisera quelques points remarquables (valeur finale, temps du premier maximum, dépassement).

$$BF(p) = \frac{k_p a}{k_p a + Jp(1 + \tau p)} = \frac{k_p a}{J\tau p^2 + Jp + k_p a} = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Temps de réponse à 5% :

$$T_{r5\%} = \frac{3}{m\omega_0}$$

Premier dépassement

$$D1 = 100e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$$

Temps du premier pic

$$T_{pic} = 100e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$$

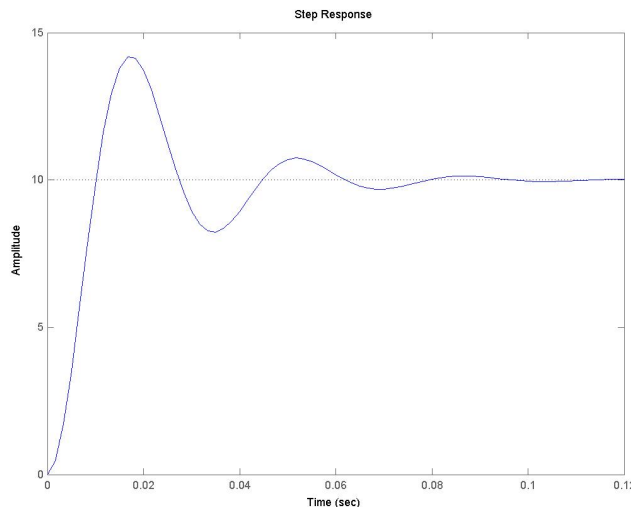


FIGURE C.26 – Réponse à un échelon de 10V.

4. Le couple de perturbation étant maintenant non nul et égal = 1N.m, déterminer l'erreur statique.

### 3 Correction proportionnelle-intégrale

Dans cette partie nous ferons l'hypothèse que le moteur est commandé par une tension  $u(t)$  telle que :

$$u(t) = k_p(\Omega_{ref} - u_m) + k_i \int_0^t (\Omega_{ref} - u_m) dt$$

1. Montrer que, y compris en présence du couple de perturbation, l'erreur statique est nulle.
2. Déterminer  $k_p$  et  $k_i$  pour avoir une réponse indicielle présentant un dépassement de 20%.

### 4 Analyse de la correction numérique

Dans cette partie nous ferons l'hypothèse que le moteur est commandé par une tension  $u(t)$  issue d'un bloqueur d'ordre 0 lui même alimenté par des valeurs numériques  $u_k$  telles que :

$$u_k = k_p(\Omega_{ref_k} - u_{m_k})$$

On souhaite qu'en boucle fermée, le système se comporte comme un système du second ordre continu de pulsation propre  $\omega_0 = 160 \text{rad.s}^{-1}$  et de facteur d'amortissement  $\xi = 0.45$ .

1. Proposer une période d'échantillonnage correcte.
2. Déterminer la transformée en  $z$  de l'ensemble moteur-hélice-génératrice tachymétrique.
3. A l'aide du critère de Jury, déterminer la plage des valeurs de  $k_p$  telle que le système soit stable en boucle fermée.
4. Proposer un correcteur numérique de type PI pour ce système.



## Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 2h

Cet examen est la comparaison dans le cas des systèmes du premier ordre retardés de trois méthodes différentes de synthèse d'un correcteur donnant à la boucle fermée des caractéristiques proches ou identiques à la réponse pile. La comparaison s'effectuera sur la réjection de la perturbation.

Les questions sont largement indépendantes entre elles, ne restez pas bloqué sur une question.

## 1 Partie 1 (8 pts, 50 mn) Une alternative à la réponse pile...

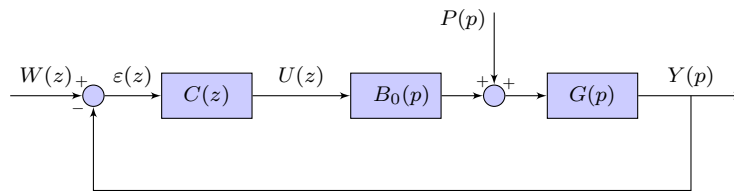


FIGURE C.27 – Système étudié.

$$G(p) = \frac{g}{1 + \tau p} e^{-Tp}$$

avec  $T = (d - 1)T_e$ , les autres valeurs sont volontairement omises! On notera  $a = e^{-T_e/\tau}$

- Déterminer la transformée en  $z$   $G(z)$  du système  $G(p)$  précédé d'un bloqueur d'ordre 0 échantillonné à la période d'échantillonnage  $T_e$ .

$$G(z) = \frac{g(1-a)}{1-az^{-1}} z^{-d}$$

- Le correcteur  $C(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)}$  de la figure C.27 est donné par son équation récurrente :

$$u_k = \alpha u_{k-1} + (1-\alpha)u_{k-d} + \beta \varepsilon_k - b\beta \varepsilon_{k-1}$$

A partir de l'équation récurrente, en déduire la fonction de transfert  $C(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)}$ .

$$C(z) = \frac{\beta(1-bz^{-1})}{1-\alpha z^{-1} - (1-\alpha)z^{-d}}$$

- En posant  $b = a$ , calculer la fonction de transfert du système en boucle fermée  $BF(z) = \frac{Y(z)}{W(z)}$ .

$$C(z)G(z) = \frac{\beta(1-bz^{-1})}{1-\alpha z^{-1} - (1-\alpha)z^{-d}} \frac{g(1-a)}{1-az^{-1}} z^{-d} = \frac{\beta g(1-a)z^{-d}}{1-\alpha z^{-1} - (1-\alpha)z^{-d}}$$

d'où

$$BF(z) = \frac{\beta g(1-a)z^{-d}}{1-\alpha z^{-1} + (\beta g(1-a) - (1-\alpha))z^{-d}}$$

- Déterminer la valeur de la constante  $\beta$  telle que le système en boucle fermée ait un comportement de type premier ordre retardé avec un pôle unique en  $\alpha$ .

$$\text{On résout : } \beta g(1-a) - (1-\alpha) = 0 \quad \text{soit} \quad \beta = \frac{(1-\alpha)}{g(1-a)} \quad \text{donc} \quad BF(z) = \frac{(1-\alpha)z^{-d}}{1-\alpha z^{-1}}$$

5. Ce correcteur garantit-t-il une erreur statique nulle ? Justifier. Oui car il présente un pôle en 1.

$$\text{Denom}(C(z)) = 1 - \alpha z^{-1} - (1 - \alpha)z^{-d}, \quad \text{pour } z = 1 \quad : \text{Denom}(C(1)) = 1 - \alpha - (1 - \alpha) = 0$$

6. Pour  $d = 2$ , calculer les pôles du correcteur et donner les limites de  $\alpha$  telles que le correcteur seul soit stable.

$$\text{Denom}(C(z)) = 1 - \alpha z^{-1} - (1 - \alpha)z^{-2}$$

pôles en 1 et  $\alpha - 1$  donc  $0 < \alpha < 2$

7. Pour  $d = 3$ , montrer que le dénominateur de  $C(z)$ , s'écrit  $(1 - z^{-1})(1 + z^{-1} + (1 - \alpha)z^{-2})$ .  
A l'aide du critère de Jury, vérifier la stabilité du correcteur seul.

$$\text{Denom}(C(z)) = (1 - z^{-1})(1 + (1 - \alpha)z^{-1} - (\alpha - 1)z^{-2})$$

soit en puissances positives de  $z$

$$\text{Denom}(C(z)) = z^3 - \alpha z - (1 - \alpha) = (z - 1)(z^2 + (1 - \alpha)z - (\alpha - 1))$$

$$(a) \sum_{i=0}^n a_i^0 = D(1) > 0 \implies 3 - 2 * \alpha > 0 \implies \alpha < 3/2$$

$$(b) (-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^0 = (-1)^n D(-1) > 0 \implies 1 > 0$$

$$(c) |a_0^0| - a_n^0 < 0 \implies |(1 - \alpha)| - 1 < 0 \implies 0 < \alpha < 2$$

donc  $0 < \alpha < 3/2$

8. Montrez que lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ , le système en boucle fermée tend vers un retard pur de  $d$  périodes d'échantillonnage.

$$BF(z) = \frac{(1 - \alpha)z^{-d}}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad \text{si } \alpha \rightarrow 0 \quad BF(z) = \frac{z^{-d}}{1} = z^{-d}$$

9. En prenant  $\alpha = 0$ ,  $b = a$  et  $\beta$  tel que déterminé à la question 4, déterminer la fonction de transfert  $F_{PY}(z)$  entre la perturbation  $P$  et la sortie  $Y$ , montrer que le pôle unique de cette fonction de transfert est le même que celui du système en boucle ouverte.

$$\begin{aligned} F_{PY}(z) &= \frac{\frac{g(1-a)}{1-az^{-1}}z^{-d}}{1 + \frac{\beta(1-bz^{-1})}{1-\alpha z^{-1} - (1-\alpha)z^{-d}} \frac{g(1-a)}{1-az^{-1}}z^{-d}} \\ &= \frac{\frac{g(1-a)}{1-az^{-1}}z^{-d}}{1 + \frac{\beta g(1-a)z^{-d}}{1-\alpha z^{-1} - (1-\alpha)z^{-d}}} = \frac{\frac{g(1-a)}{1-az^{-1}}z^{-d}}{1 + \frac{\beta g(1-a)z^{-d}}{1-z^{-d}}} = \frac{\frac{g(1-a)}{1-az^{-1}}z^{-d}(1-z^{-d})}{(1-z^{-d}) + \beta g(1-a)z^{-d}} \\ &= \frac{g(1-a)}{1-az^{-1}}z^{-d}(1-z^{-d}) \end{aligned}$$

10. Pour  $W(z)$  nul et  $P(z)$  échelon unité, vérifier que lorsque  $t \rightarrow \infty$  la sortie  $Y(z)$  tend vers 0.

$$Y(z) = P(z)F_{PY}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \frac{g(1-a)}{1-az^{-1}}z^{-d}(1-z^{-d})$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})}{1 - z^{-1}} \frac{g(1-a)}{1 - az^{-1}}z^{-d}(1 - z^{-d}) = 0$$

## 2 Partie 2 (7 pts, 50 mn) Synthèse RST

La méthode précédente ayant montré que la dynamique de réjection de perturbation est la même que la dynamique en boucle ouverte, on se propose d'améliorer ce point en implantant un correcteur RST.

1. Décomposez  $G(z)$  sous la forme :

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B^+(z)B^-(z)}{(1 - z^{-1})^m A^+(z)A^-(z)}$$

où  $B^+(z), A^+(z)$  sont compensables et  $B^-(z), A^-(z)$  ne le sont pas.

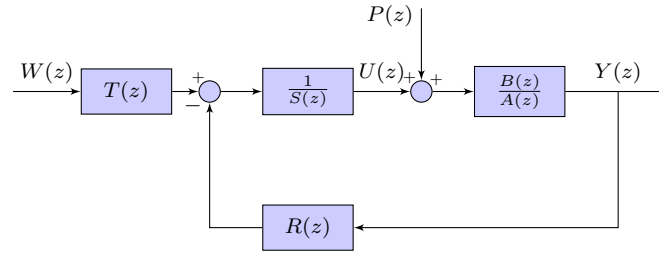


FIGURE C.28 – Système étudié.

$$G(z) = \underbrace{\frac{g(1-a)}{1-az^{-1}}}_{A^+(z)} \underbrace{z^{-d}}_{B^-(z)}$$

et  $A^-(z) = 1$

2. A partir du schéma de la figure C.28, montrer que la fonction de transfert  $F_{PY}(z)$  entre la perturbation  $P(z)$  et la sortie  $Y(z)$  est de la forme :

$$F_{PY}(z) = \frac{BS}{AS + BR}$$

3. On pose  $S(z) = (1 - z^{-1})S_1(z)$ , quel type de perturbation sera asymptotiquement rejeté ? Les perturbations en échelon uniquement.
4. Afin d'obtenir un comportement astatique, donc que  $F_{PY}(z)$  soit un polynôme en  $z^{-1}$  et non pas une fraction rationnelle. Ecrire l'équation diophantienne reliant les polynômes  $A(z)$ ,  $B(z)$ ,  $R(z)$  et  $S_1(z)$ .

$$F_{PY}(z) = \frac{BS}{AS + BR} = \frac{\text{polynôme en } z^{-1}}{1}$$

d'où

$$AS + BR = 1 \implies (1 - az^{-1})(1 - z^{-1})S_1(z) + (1 - a)z^{-d}R(z) = 1$$

5. En prenant  $d = 2$ , déterminer l'ordre des polynômes  $R(z)$  et  $S_1(z)$ .

$$\begin{aligned} d^\circ R &= 1 \implies R(z) = r_0 + r_1z^{-1} \\ d^\circ S_1 &= 1 \implies S_1(z) = s_0 + s_1z^{-1} \end{aligned}$$

6. Toujours avec  $d = 2$ , déterminer les polynômes  $R(z)$  et  $S_1(z)$ .

$$(1 - az^{-1})(1 - z^{-1})(s_0 + s_1z^{-1}) + (1 - a)z^{-2}(r_0 + r_1z^{-1}) = 1$$

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ -(a+1)s_0 + s_1 &= 0 \implies s_1 = a+1 \\ as_0 - (a+1)s_1 + (1-a)r_0 &= 0 \implies r_0 = -\frac{a+(a+1)^2}{1-a} \\ as_1 + (1-a)r_1 &= 0 \implies r_1 = -\frac{a(a+1)}{1-a} \end{aligned}$$

7. Déterminer la fonction de transfert  $F_{WY}(z)$  entre  $W(z)$  et  $Y(z)$ .

$$F_{WY}(z) = \frac{BT}{AS + BR} = BT = (1 - a)z^{-d}T$$

---

2. Les degrés des polynômes  $R(z)$  et  $S_1(z)$  sont le résultat du match de football du 2 Avril 1955 entre Charlton Athletic et Newcastle United, comme quoi, bien connaître le foot peut être utile !

8. Calculer  $T(z)$  tel que la fonction de transfert  $F_{WY}(z)$  soit égale à  $z^{-d}$ .

$$F_{WY}(z) = (1-a)z^{-d}T = z^{-d} \implies T = \frac{1}{1-a}$$

9. Déterminer l'équation récurrente  $u_k$  en fonction des  $u_{k-i}$ ,  $w_{k-i}$  et  $y_{k-i}$ .

### 3 Partie 3 (5 pts, 20 mn) Synthèse pile

1. En reprenant la figure C.27 et en posant  $d = 2$ , faire une synthèse de  $C(z)$  de type réponse pile.  
En reprenant les notations du cours :

$$\begin{aligned} 1 - F(z) &= (1 - z^{-1})^{m+1} A^{-1} K'(z) = (1 - z^{-1}) K(z) \\ F(z) &= B^+(z) B^-(z) L(z) = g(1-a) z^{-2} L(z) \end{aligned}$$

Ce qui revient à résoudre l'équation diophantienne :

$$(1 - z^{-1})K(z) + g(1-a)z^{-2}L(z) = 1$$

$$\begin{aligned} d^\circ K(z) &= 1 \implies K(z) = k_0 + k_1 z^{-1} \\ d^\circ L(z) &= 0 \implies L(z) = l_0 \end{aligned}$$

$$(1 - z^{-1})(k_0 + k_1 z^{-1}) + g(1-a)z^{-2}l_0 = 1$$

$$\begin{aligned} k_0 &= 1 \\ k_1 - k_0 &= 0 \implies k_1 = 1 \\ -k_1 + g(1-a)l_0 &= 0 \implies l_0 = \frac{1}{g(1-a)} \end{aligned}$$

Le correcteur s'écrit alors :

$$C(z) = \frac{(1 - az^{-1}) \frac{1}{g(1-a)}}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}$$

2. Montrez que le correcteur obtenu est instable.

$$C(z) = \frac{(1 - az^{-1}) \frac{1}{g(1-a)}}{(1 - z^{-1}) \underbrace{(1 + z^{-1})}_{\text{pôle instable!}}}$$

3. Montrer que le correcteur  $C(z)$  de la première partie est égal au correcteur de la réponse pile si l'on pose  $\alpha = 0$ .

*Si tout c'est bien passé, vous venez de découvrir que le correcteur RST permet une meilleure réjection de la perturbation que le correcteur de Dahlin (partie 1) qui n'est qu'une approximation de la réponse pile permettant d'éviter le pôle en -1 dans le cas particulier des systèmes du premier ordre retardés.*

## Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 1h

Le problème posé est l'asservissement de position d'un moteur à courant continu.

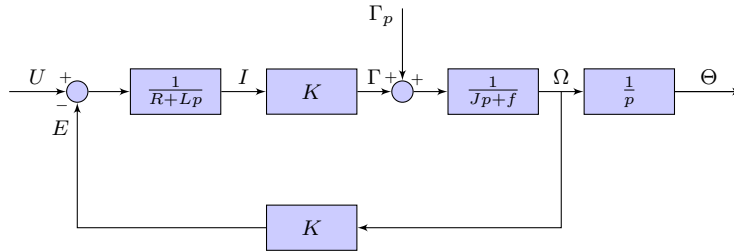


FIGURE C.29 – Schéma bloc de la machine à courant continu commandée par l'induit.

Applications numériques :

$J = 2 \text{ kg.m}^2$	: inertie totale du rotor et de la charge
$K = 1 \text{ V.s.rad}^{-1}$	: coefficient de F.E.M et de couple
$R = 1 \text{ } \Omega$	: résistance de l'induit
$L = 0.05 \text{ H}$	: inductance de l'induit
$f = 0 \text{ N.m.s.rad}^{-1}$	: frottement visqueux

## 1 Modélisation - Analyse

1. A partir du schéma de la figure C.29, retrouver les équation différentielles liant :

- $u(t)$ ,  $i(t)$  et  $e(t)$
- $\gamma(t)$ ,  $\gamma_p(t)$  et  $\omega(t)$

Les conditions initiales sont supposées nulles!

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + e \quad (\text{C.1})$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = \gamma + \gamma_p - f\omega \quad (\text{C.2})$$

$$\gamma = ki \quad (\text{C.3})$$

$$e = K\omega \quad (\text{C.4})$$

2. Déterminer la fonction de transfert  $G(p)$  entre la vitesse  $\Omega(p)$  et la tension appliquée au moteur  $U(p)$ .

$$G(p) = \frac{K}{JLp^2 + JRp + K^2}$$

3. Tracer à main levée, la forme générale du diagramme de Bode asymptotique de  $G(p)$  en module et en phase. On donnera quelques points remarquables.

4. Toujours à main levée, tracer dans le plan complexe les pôles du système.

Pôles en -19.5 et -0.513

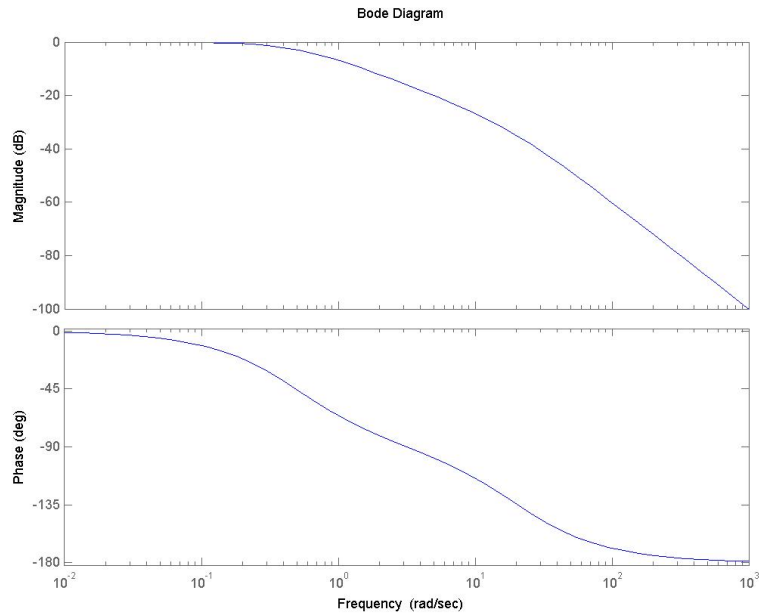


FIGURE C.30 – Diagramme de Bode du système en boucle ouverte

## 2 Correction proportionnelle

1. L'asservissement de la vitesse du moteur est réalisé à l'aide d'un correcteur proportionnel  $C(p) = A$  et d'un capteur de vitesse de coefficient  $K' = 0.1 \text{ V.s.rad}^{-1}$ . Donner le schéma bloc de cet asservissement.
2. En faisant l'hypothèse que  $\Gamma(p) = 0$ , déterminer la fonction de transfert du système en boucle fermée  $H(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)}$ .

$$H(p) = \frac{AK}{JLp^2 + JRp + K^2 + AKK'}$$

3. Montrer, à l'aide du critère de Routh, que quelle que soit la valeur de  $A > 0$ , le système en boucle fermée reste stable.

Tableau de Routh

$p^2$	$JL$	$K^2 + AKK'$	$0$
$p^1$	$JR$	$0$	$0$
$p^0$	$K^2 + AKK'$	$0$	$0$

Comme  $JL$  et  $JR$  sont positifs, il faut résoudre  $K^2 + AKK' > 0$  donc :

$$A > -\frac{K}{K'}$$

4. En prenant  $A = 1$  et en supposant que  $U(p)$  soit un échelon unité, quelle est la valeur finale de la vitesse ?

$$H(p) = \frac{K}{JLp^2 + JRp + K^2 + KK'}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \times \frac{1}{p} \frac{K}{JLp^2 + JRp + K^2 + KK'} = \frac{1}{K + K'} = 0.9091$$

5. Toujours avec  $A = 1$  et  $U(p)$  un échelon unité, quelle est la valeur finale de la sortie du capteur de vitesse ? Un dixième de la valeur précédente puisque le capteur divise par 10...

$$\frac{K'}{K + K'} = 0.09091$$

6. Déterminer  $A$  tel que l'erreur statique soit égale à  $2 \text{ ‰}$ .

$$A = 4990$$

7. Montrer que  $H(p)$  peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{\alpha}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} \tag{C.5}$$

$$H(p) = \frac{AK}{JLp^2 + JRp + K^2 + AKK'} = \frac{\frac{AK}{K^2+AKK'}}{\frac{JL}{K^2+AKK'}p^2 + \frac{JR}{K^2+AKK'}p + 1}$$

8. En déduire la valeur du facteur d'amortissement  $m$ . Que pensez-vous de cette valeur ?

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K^2+AKK'}{JL}} \text{ et } m = \frac{1}{2} \frac{JR}{\sqrt{JL(K^2+AKK')}}$$

Applications numériques :  $\omega_0 = 10\sqrt{50} \simeq 70$  et  $m = \frac{\sqrt{2}}{10} \simeq 0.14$

Le facteur d'amortissement est très faible, le temps d'établissement sera très long et le dépassement très grand.

9. Afin de réduire le facteur d'amortissement, on se propose d'ajouter une boucle supplémentaire de courant suivant le schéma de la figure C.31. Montrer que le coefficient  $B$  n'intervient que dans le terme  $\frac{2m}{\omega_0}$  de l'équation C.5.

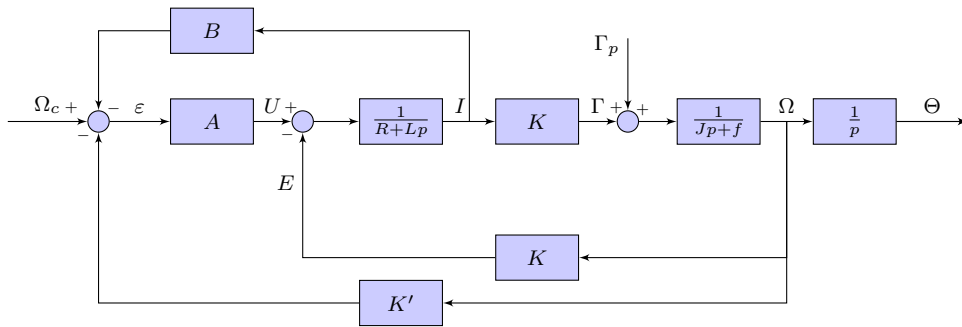


FIGURE C.31 – Boucle asservissement de vitesse et de courant simultanés.

$$H(p) = \frac{\frac{AK}{K^2+AKK'}}{\frac{JL}{K^2+AKK'}p^2 + \frac{J(R-AB)}{K^2+AKK'}p + 1}$$

10. On désire un dépassement de 5% de la valeur finale. En déduire la valeur du facteur d'amortissement  $m$  correspondante puis la valeur de  $B$ .

$$\text{Dans ce cas : } \omega_0 = \sqrt{\frac{K^2+AKK'}{JL}} \text{ et } m = \frac{1}{2} \frac{J(R-AB)}{\sqrt{JL(K^2+AKK')}}$$

On souhaite  $m = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.707$  d'où  $B \simeq -8.10^{-4}$

11. Avec les réglages précédents, Quelle est l'erreur statique engendrée par un couple de perturbation  $\Gamma_p(p)$  en échelon unité ?

### 3 Correcteur PI

1. Montrer que la fonction transfert  $G(p)$ , peut s'écrire sous la forme :

$$G(p) = \frac{\beta}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

avec  $\tau_1 \gg \tau_2$

$$G(p) = \frac{K}{JLp^2 + JRp + K^2} = \frac{\beta}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \simeq \frac{1}{(1 + 1.95p)(1 + 0.05p)}$$

2. En déduire que  $G(p)$  peut être approximée par :

$$\frac{\beta e^{-\tau_2 p}}{(1 + \tau_1 p)}$$

$$G(p) \simeq \frac{1}{(1 + 1.95p)(1 + 0.05p)} \simeq \frac{(1 - 0.05p)}{(1 + 1.95p)} \simeq \frac{e^{-0.05p}}{(1 + 1.95p)}$$

Que représente  $\tau_2$  alors ? Quelle est le domaine de validité fréquentiel de cette approximation ?

$\tau_2$  est un retard pur, cette approximation est valable jusqu'à la fréquence de coupure de la constante de temps rapide ( $\tau_2$ ) soit jusqu'à  $f = f_c = \frac{1}{2\pi\tau_2}$

3. Tracer à main levée la réponse indicielle de l'approximation de  $G(p)$ .  
4. En déduire un correcteur PI de type Ziegler-Nichols pour le système.

$$K = 0.9 \frac{1}{a\tau} \text{ avec } a = E/T$$

$$T_i = 3.3\tau$$

$$\text{Application : } K = 0.9 \frac{T}{E\tau} = 0.9 \frac{1.95}{0.09096 * 0.05} = 385.8839$$

$$T_i = 3.3\tau_2 = 0.1650$$

## 4 Régulation numérique

1. La transformée en  $z$  de  $G(p)$  précédé d'un bloqueur d'ordre 0 avec une période d'échantillonnage de  $T_e = 0.05s$  est :

$$G(z) = \frac{0.09179(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}{(1 - 0.9747z^{-1})(1 - 0.3774z^{-1})}$$

2. Le système est bouclé, comme dans la partie analogique à l'aide d'un correcteur proportionnel  $C(z) = A$  et d'un capteur de vitesse de coefficient  $K' = 0.1V.s.rad^{-1}$ . Donner le schéma bloc de cet asservissement. On précisera les parties numériques et analogiques.  
3. En utilisant le critère de Jury, déterminer la plage de gains  $A > 0$  tel que le système en boucle fermée soit stable.

En boucle fermée :

$$H(z) = \frac{AG(z)}{1 + AK'G(z)} = \frac{0.09179A(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}{(1 - 0.9747z^{-1})(1 - 0.3774z^{-1}) + 0.09179AK'(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{0.09179A(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}{(1 - 0.9747z^{-1})(1 - 0.3774z^{-1}) + 0.09179AK'(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{0.09179A(z + 0.7181)}{(z^2 + (-1.3521 + 0.009179A)z + (0.3679 + 0.00066A))}$$

Critère de Jury :

- $D(1) > 0 \implies 0.15749 + 0.1577A > 0 \implies A > -0.99$
- $-1^n D(-1) > 0 \implies 0.2720129503 - 0.00025875A > 0 \implies A < 1051.23$
- $|a_0^0| - a_2^0 < 0 \implies |0.0006591A + 0.03679| - 1 < 0 \implies -207.25 < A < 95.77$

Donc  $-0.99 < A < 95.77$

4. En l'absence de perturbation  $\Gamma(z)$ , déterminer l'erreur statique minimale que l'on peut obtenir avec un tel correcteur.

On calcule  $\varepsilon(t)$  pour  $A = A_{max} = 95.77$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})\varepsilon(z)$$

avec :

$$\varepsilon(z) = \Omega_c(z) - \Omega(z)K' = \Omega_c(z) - \varepsilon(z)AG(z)K'$$

$$\varepsilon(z) = \frac{\Omega_c(z)}{1 + AG(z)K'} = \frac{\frac{1}{1-z^{-1}}}{1 + A \frac{0.09179(1+0.7181z^{-1})z^{-1}}{(1-0.9747z^{-1})(1-0.3774z^{-1})} K'}$$



$$\varepsilon(z) = \frac{\frac{(1-0.9747z^{-1})(1-0.3774z^{-1})}{1-z^{-1}}}{(1-0.9747z^{-1})(1-0.3774z^{-1}) + A(0.09179(1+0.7181z^{-1})z^{-1})K'}$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{\frac{(1-0.9747z^{-1})(1-0.3774z^{-1})}{1-z^{-1}}}{(1-0.9747z^{-1})(1-0.3774z^{-1}) + A(0.09179(1+0.7181z^{-1})z^{-1})K'}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-0.9747z^{-1})(1-0.3774z^{-1})}{(1-0.9747z^{-1})(1-0.3774z^{-1}) + A(0.09179(1+0.7181z^{-1})z^{-1})K'} = 0.01$$

5. En posant :

$$C(z) = K \frac{(1-b_0z^{-1})(1-b_1z^{-1})(1-b_2z^{-1})}{(1-a_1z^{-1})^l(1-a_0z^{-1})}$$

Quelle valeur donner à  $a_1$  pour obtenir une erreur statique nulle ?

$a_1 = 1 \implies$  Pôle en 1 donc un intégrateur pur

6. Le correcteur  $C(z)$  est-il causal ?

non

## Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 1h

Le problème posé est l'asservissement de température d'un four.

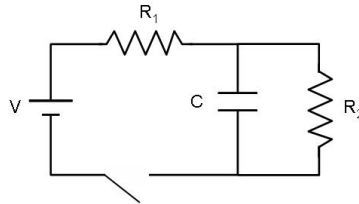


FIGURE C.32 – Modèle électrique équivalent d'un four.

Applications numériques : *Fantaisistes pour simplifier les calculs*

$$V = 1000$$

$$R_1 = 1$$

$$R_2 = 1$$

$$C = 1$$

$$\tau = 0.1$$

## 1 Modélisation - Analyse

L'interrupteur est tel qu'il s'ouvre lorsque la température dépasse  $200^\circ\text{C}$  et se ferme lorsqu'elle est inférieure à  $190^\circ\text{C}$ . La température ambiante est de  $20^\circ\text{C}$ .

- Déterminer la tension aux bornes de  $R_2$ ,  $V_{R_2}$  (la température du four) en fonction de la valeur des composants et de  $V$  en se référant au schéma de la figure C.32.  
Les conditions initiales seront supposées NON nulles!
- Calculer le temps nécessaire pour atteindre la température de  $200^\circ\text{C}$ .
- Tracer à main levée, la forme générale de la température du four en fonction du temps.

## 2 Asservissement de type P

On implante un capteur de température dont la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

- L'interrupteur étant fermé, déterminer la fonction de transfert  $G(p)$  liant la température du four ( $V_{R_2}$ ) et la puissance électrique consommée par la résistance ( $V$ ).
- Dessiner le schéma d'un asservissement de type P, faisant apparaître, le four, le capteur, le sommateur, le correcteur.
- On asservi le système avec un correcteur de type proportionnel de gain  $A$ . Montrer que si  $A > 0$  le système asservi en boucle fermée est toujours stable.
- Déterminer  $A$  tel que le système en boucle fermée présente un dépassement de 20%.
- Quelle est alors la pulsation propre du système asservi?
- Soumis à un échelon de commande  $Y_c = 200^\circ\text{C}$ , Quelle est l'erreur statique?

### 3 Asservissement de type PI

Dans cette partie on fera l'hypothèse que  $\tau$  est très petite devant d'autres constantes de temps et peut être assimilée à un retard pur.

1. Donner la nouvelle fonction de transfert  $G'(p) = G(p)H(p)$  tenant compte de cette hypothèse.
2. Calculer un correcteur de type PI pour ce système.
3. Soumis à un échelon de commande  $Y_c = 200^\circ\text{C}$ , Quelle est l'erreur statique ?

### 4 Asservissement numérique

1. Déterminer la transformée en  $z$  de l'ensemble four et capteur de température précédés d'un bloqueur d'ordre 0.
2. Ce système est asservi par un correcteur proportionnel de gain  $A$ . Déterminer les limites de  $A$  telles que le système reste stable en boucle fermée.
3. Déterminer la relation entre  $T_e$ ,  $A$  et la stabilité du système en boucle fermée.

1<sup>ère</sup> année  
Juin 2012

## Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 2h

*Cet examen se compose de deux parties totalement indépendantes. Au sein des parties, les questions sont largement indépendantes entre elles, ne restez pas bloqué sur une question.*

*Les résultats seront plus concis et les réponses un peu plus "faciles" à trouver en utilisant la forme en  $z^{-1}$ , sauf pour l'application du critère de Jury, qui implique la forme en  $z$ .*

### 1 Partie 1 (10 pts, 1h) La suite de Fibonacci...

La suite de Fibonacci est définie par :

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

avec  $f_0 = 0$  et  $f_1 = 1$

1. En utilisant le théorème de l'avance, montrer que la transformée en  $z$   $F(z)$  de la suite de Fibonacci s'écrit sous la forme :

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

- En posant  $\mathcal{Z}[f_n] = F(z)$ , déterminer  $\mathcal{Z}[f_{n+1}]$ , en fonction de  $F(z)$  et des conditions initiales
- En déduire  $\mathcal{Z}[f_{n+2}]$ , puis la transformée  $F(z)$  de la suite de Fibonacci.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(t + kT_e)U(t)] &= z^k F(z) - z^k F(0) - z^{k-1} F(T_e) - z^{k-2} F(2T_e) - \dots - z F((k-1)T_e) \\ \mathcal{Z}[f(t + kT_e)U(t)] &= z^k \left[ F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f(nT_e) z^{-n} \right] \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f_n] &= F(z) \\ \mathcal{Z}[f_{n+1}] &= zF(z) - zf(0) \\ \mathcal{Z}[f_{n+2}] &= z^2 F(z) - z^2 f(0) - zf(1) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} z^2 F(z) - z^2 f(0) - zf(1) &= zF(z) - zf(0) + F(z) \\ z^2 F(z) - z &= zF(z) + F(z) \\ F(z)(z^2 - z - 1) &= z \\ F(z) &= \frac{z}{z^2 - z - 1} \end{aligned}$$

2. On définit un système échantillonné  $G(z)$  tel que, soumis à une entrée en échelon  $U(z)$ , sa sortie est le signal  $F(z)$ . Donner la transmittance opérationnelle de  $G(z)$ .

$$F(z) = U(z)G(z)$$

$$G(z) = \frac{F(z)}{U(z)} = \frac{\frac{z}{z^2 - z - 1}}{\frac{z}{z-1}} = \frac{z-1}{z^2 - z - 1} = \frac{(1 - z^{-1})z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}}$$

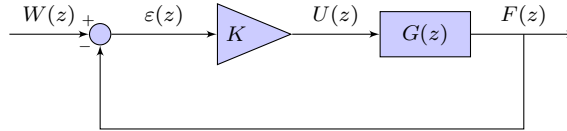


FIGURE C.33 – Tentative de stabilisation par un gain  $K$ .

3. Montrer que la transmittance  $G(z)$  est instable. pôles de  $G(z)$  :  $z_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \simeq 1.6$  (instable) et  $z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0.6$
4. Montrer qu'il n'existe pas de valeur de gain  $K$  tel que le système décrit en figure C.33 soit stable. Fonction de transfert en boucle fermée :

$$FTBF(z) = \frac{K(z-1)}{z^2 + (K-1)z - (K+1)}$$

Critère de Jury :  $D(1) > 0 \implies 1 + (K-1) - (K+1) > 0 \implies -1 > 0$  donc toujours instable  $\forall K$ .

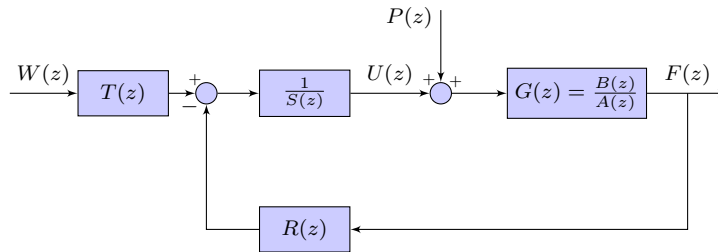


FIGURE C.34 – Principe de correcteur par correcteur RST.  $P(z)$  est une perturbation.

5. On se propose de corriger le système avec un correcteur de type RST (cf. fig.C.34). Décomposez  $G(z)$  sous la forme :

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B^+(z)B^-(z)}{(1-z^{-1})^m A^+(z)A^-(z)}$$

où  $B^+(z), A^+(z)$  sont compensables et  $B^-(z), A^-(z)$  ne le sont pas.

$$G(z) = \frac{(1-z^{-1})z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}} = \frac{(1-z^{-1})z^{-1}}{(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})}$$

$$G(z) = \frac{\overbrace{(1-z^{-1})z^{-1}}^{B^-(z)}}{\underbrace{(1-z_2z^{-1})}_{A^+(z)} \underbrace{(1-z_1z^{-1})}_{A^-(z)}}$$

6. Déterminer la fonction de transfert  $F_{WY}(z)$  en fonction des polynômes  $A, B, R, S$  et  $T$  entre la consigne  $W(z)$  et la sortie  $F(z)$ .

$$F_{WY}(z) = \frac{BT}{AS + BR}$$

7. On pose  $S(z) = (1-z^{-1})^n S_1(z)$ . Quelle valeur doit-on donner à  $n$  pour avoir une erreur statique nulle, y compris en présence de perturbations  $P(z)$  de type échelon?  $n = 1$
8. On souhaite avoir un comportement de type premier ordre précédé d'un bloqueur d'ordre 0 avec un gain statique de 1 et un pôle en  $\alpha$ . Donner le modèle de la fonction de transfert modèle voulue  $M_{WY}(z)$  en boucle fermée.

$$M_{WY}(z) = \frac{1-\alpha}{z-\alpha} = \frac{(1-\alpha)z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$$

9. Bien que l'un des pôles de la fonction de transfert soit compensable, **on décide de ne pas le compenser**. Après simplification de l'équation  $F_{WY}(z) = M_{WY}(z)$ , déterminer les polynômes  $R(z)$ ,  $S(z)$  et  $T(z)$ .

$$F_{WY}(z) = \frac{(1 - z^{-1})z^{-1}T(z)}{(1 - z^{-1})S_1(z)(1 - z^{-1} - z^{-2}) + (1 - z^{-1})z^{-1}R(z)} = \frac{(1 - \alpha)z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$$

qui se simplifie en :

$$F_{WY}(z) = \frac{T(z)}{(1 - z^{-1} - z^{-2})S_1(z) + z^{-1}R(z)} = \frac{(1 - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Résolution de l'équation diophantienne : forme  $\mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{B}\mathbb{Y} = \mathbb{C}$

$$\underbrace{(1 - z^{-1} - z^{-2})}_{\mathbb{A}} \underbrace{S_1(z)}_{\mathbb{X}} + \underbrace{z^{-1}}_{\mathbb{B}} \underbrace{R(z)}_{\mathbb{Y}} = \underbrace{1 - \alpha z^{-1}}_{\mathbb{C}}$$

$$\begin{array}{ccc} d^\circ \mathbb{C} & ? & d^\circ \mathbb{A} + d^\circ \mathbb{B} \\ 1 & < & 2 + 1 \end{array}$$

donc l'équation est régulière, on en déduit que :

$$\begin{aligned} d^\circ \mathbb{X} = d^\circ \mathbb{B} - 1 &\implies d^\circ S_1(z) = 0 \implies S_1(z) = s_0 \\ d^\circ \mathbb{Y} = d^\circ \mathbb{A} - 1 &\implies d^\circ R(z) = 1 \implies R(z) = r_0 + r_1 z^{-1} \end{aligned}$$

donc :

$$(1 - z^{-1} - z^{-2})s_0 + z^{-1}(r_0 + r_1 z^{-1}) = 1 - \alpha z^{-1}$$

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ -s_0 + r_0 &= -\alpha \\ -s_0 + r_1 &= 0 \end{aligned}$$

d'où :  $s_0 = 1, r_0 = (1 - \alpha), r_1 = 1$

$$T(z) = (1 - \alpha), S_1(z) = 1, S(z) = (1 - z^{-1}), R(z) = (1 - \alpha) + z^{-1}$$

## 2 Partie 2 (10 pts, 1h) Système instable

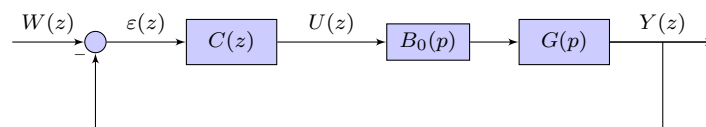


FIGURE C.35 – Système étudié.

Soit le système  $G(p)$  tel que :

$$G(p) = \frac{1}{1 - \tau p}$$

avec  $\tau > 0$ , le système est donc instable !

**Synthèse du correcteur**

1. Déterminer la transformée en  $z$   $G(z)$  de  $G(p)$  précédé d'un bloqueur d'ordre 0. On posera  $a = e^{T_e/\tau}$

$$G(z) = \frac{1-a}{z-a} = \frac{(1-a)z^{-1}}{1-az^{-1}} \text{ avec } a = e^{T_e/\tau}$$

2. Décomposez  $G(z)$  sous la forme :

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B^+(z)B^-(z)}{(1-z^{-1})^m A^+(z)A^-(z)}$$

où  $B^+(z), A^+(z)$  sont compensables et  $B^-(z), A^-(z)$  ne le sont pas.

$$G(z) = \frac{\underbrace{(1-a)}_{B^+(z)} \underbrace{z^{-1}}_{B^-(z)}}{\underbrace{(1-az^{-1})}_{A^-(z)}}$$

3. Déterminer un correcteur  $C(z)$  pour le système  $G(z)$  de type réponse pile pour une entrée en échelon. Soit à résoudre :

$$\begin{aligned} 1 - F(z) &= (1 - z^{-1})A^-K(z) \\ F(z) &= B^+(z)B^-(z)L(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - z^{-1})A^-K(z) + B^+(z)B^-(z)L(z) &= 1 \\ (1 - z^{-1})(1 - az^{-1})K(z) + (1 - a)z^{-1}L(z) &= 1 \end{aligned}$$

Résolution de l'équation diophantienne : forme  $\mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{B}\mathbb{Y} = \mathbb{C}$

$$\underbrace{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})}_{\mathbb{A}} \underbrace{K(z)}_{\mathbb{X}} + \underbrace{(1 - a)z^{-1}}_{\mathbb{B}} \underbrace{L(z)}_{\mathbb{Y}} = \underbrace{1}_{\mathbb{C}}$$

$$\begin{aligned} d^\circ \mathbb{C} &? \quad d^\circ \mathbb{A} + d^\circ \mathbb{B} \\ 0 &< \quad 2 + 1 \end{aligned}$$

donc l'équation est régulière, on en déduit que :

$$\begin{aligned} d^\circ \mathbb{X} = d^\circ \mathbb{B} - 1 &\implies d^\circ K(z) = 0 \implies K(z) = k_0 \\ d^\circ \mathbb{Y} = d^\circ \mathbb{A} - 1 &\implies d^\circ L(z) = 1 \implies L(z) = l_0 + l_1 z^{-1} \end{aligned}$$

En appliquant :

$$\begin{aligned} (1 - z^{-1})(1 - az^{-1})k_0 + (1 - a)z^{-1}(l_0 + l_1 z^{-1}) &= 1 \\ \implies \begin{cases} k_0 = 1 \\ -k_0(1 + a) + (1 - a)l_0 = 0 \\ ak_0 + (1 - a)l_1 = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} k_0 = 1 \\ l_0 = \frac{1+a}{1-a} \\ l_1 = \frac{-a}{1-a} \end{cases} \end{aligned}$$

d'où le correcteur :

$$C(z) = \frac{A^+(z)L(z)}{(1 - z^{-1})K(z)} = \frac{l_0 + l_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

**Etude de la réponse temporelle en boucle fermée**

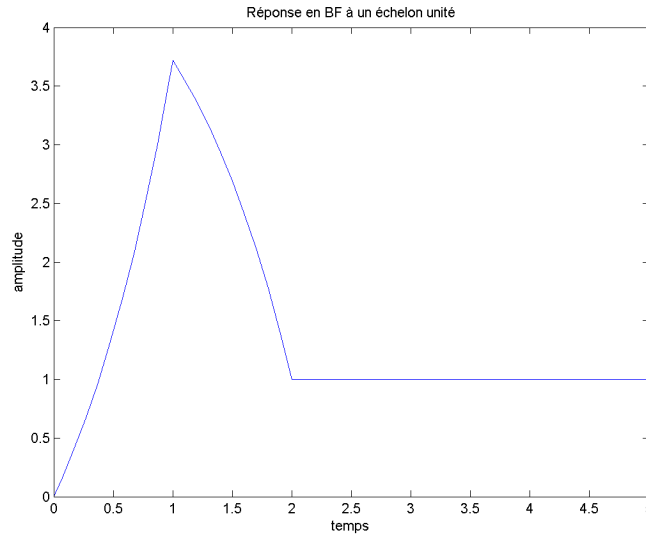


FIGURE C.36 – Réponse du système en boucle fermée (ici,  $y(T_e) = 3.75, T_e = 1\text{s}$ ).

4. Le correcteur  $C(z)$  est de la forme :

$$C(z) = \frac{l_0 + l_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

La sortie analogique mesurée sur le système asservi avec le correcteur  $C(z)$  donné précédemment est représentée en figure C.36. Déterminer la première commande  $u(0)$  envoyée au bloqueur d'ordre 0. Avec les notations de la figure C.35

$$C(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{l_0 + l_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

donc :

$$U(z)(1 - z^{-1}) = \varepsilon(z)(l_0 + l_1 z^{-1})$$

En repassant en temporel :

$$u(k) - u(k-1) = l_0 \varepsilon(k) + l_1 \varepsilon(k-1)$$

à l'instant  $k = 0$

$$u(0) = l_0 \varepsilon(0)$$

et  $\varepsilon(0) = 1$  car le système n'a pas le temps de bouger et il est soumis à un échelon unité. donc

$$u(0) = l_0 = \frac{1+a}{1-a}$$

5. Le signal de sortie  $y(t)$  est donné en figure C.36. Montrer que ce signal  $y(t)$  est donné par la fonction :

$$y(t) = l_0(1 - e^{t/\tau}) \quad \text{pour } 0 < t < T_e$$

Entre 0 et  $T_e$  tout se passe comme si le système était soumis à un échelon d'amplitude  $l_0$  donc :

$$Y(p) = \frac{l_0}{p} G(p) = \frac{l_0}{p} \frac{1}{1 - \tau p}$$

dont l'original est (cf tables) :

$$y(t) = l_0(1 - e^{t/\tau})$$

6. Déterminer  $T_e$  pour que la sortie  $y(T_e)$  soit égale à 3 pour une entrée en échelon unité.

$$y(T_e) = l_0(1 - e^{T_e/\tau}) = \frac{1+a}{1-a}(1 - e^{T_e/\tau}) = \frac{1 + e^{T_e/\tau}}{1 - e^{T_e/\tau}}(1 - e^{T_e/\tau}) = 1 + e^{T_e/\tau}$$



il faut donc résoudre :

$$1 + e^{T_e/\tau} = 3 \quad \text{soit} \quad e^{T_e/\tau} = 2 \quad \text{donc} \quad T_e/\tau = \ln 2$$

donc

$$T_e = \ln 2 \tau$$

7. Montrer que, quelle que soit  $T_e$  la sortie  $y(T_e)$ , sera au moins égale à 2 pour une entrée en échelon unité.

$$y(T_e) = 1 + e^{T_e/\tau}$$

$T_e$  et  $\tau$  sont positifs donc  $T_e/\tau > 0$

$$\lim_{T_e \rightarrow 0} y(T_e) = \lim_{T_e \rightarrow 0} 1 + e^{T_e/\tau} = 2$$

*Donc au mieux, le système présente 100% de dépassement... un correcteur RST ferait nettement mieux, mais ce sera l'objet d'un prochain examen !*

1<sup>ère</sup> année  
Novembre 2012

## Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 1h

*Dans cet examen partiel, pratiquement toutes les questions sont indépendantes !*

Soit le système décrit par la fonction de transfert  $G(p)$  :

$$G(p) = \frac{Ae^{-\tau p}}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = \frac{Y(p)}{W(p)}$$

Applications numériques :  $A = 1, \tau = 10, \tau_1 = 1, \tau_2 = 100$

1. Donner l'équation différentielle liant  $y(t)$  et ses dérivées à  $w(t)$ .
2. Tracer une approximation réaliste de la réponse indicielle de  $G(p)$ , pratiquement sans calcul !
3. Tracer la partie module du diagramme de Bode du système. Préciser quelques points remarquables.
4. A la pulsation  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\tau}$ , quelle est la phase apportée par le retard pur ?
5. Dans la suite, le retard pur est approximé par une constante de temps, ainsi :

$$G(p) = \frac{Ae^{-\tau p}}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \simeq \frac{A}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)(1 + \tau p)} = G_1(p)$$

On considère généralement que cette approximation est correcte pour  $\omega \leq \frac{1}{\tau}$

Le système est bouclé et corrigé par un gain  $k$  tel que représenté en figure C.37.

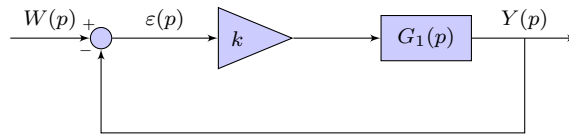


FIGURE C.37 – Système bouclé et corrigé par un gain  $k$ .

Déterminer le gain  $k = k_{max}$  tel que le système reste stable en boucle fermée. Montrer qu'à la limite de l'oscillation ( $k = k_{max}$ ) le système en boucle fermée présente deux pôles complexes conjugués à partie réelle nulle.

6. De la question précédente, déduire la période d'oscillation à la limite de l'instabilité puis un correcteur PI de type Ziegler - Nichols adapté au système.

## 1 Analyse du système échantillonné

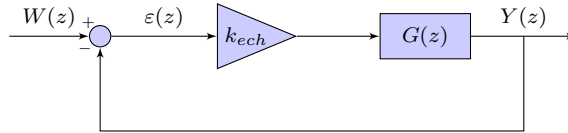
La période d'échantillonnage est fixée à  $T_e = \tau$

1. Déterminer la fréquence maximale que l'on peut échantillonner sans perte d'information.
2. Montrer que la constante de temps  $\tau_2$  est alors incontrôlable par un correcteur numérique.
3. On considère que la constante de temps  $\tau_2$  est négligeable devant les autres constantes de temps, la fonction de transfert devient alors :

$$G_2(p) \simeq \frac{Ae^{-\tau p}}{(1 + \tau_1 p)}$$

Déterminer la fonction de transfert échantillonnée  $G(z)$ , transformée en  $z$  de  $G(p)$  précédée d'un bloqueur d'ordre 0.

4. Le système est bouclé et corrigé par un gain  $k_{ech}$  tel que représenté en figure C.38.  
En utilisant le critère de Jury, déterminer le gain maximal  $k_{ech}$  tel que le système bouclé reste stable.
5. Pour  $k_{ech}$ , déterminer les pôles de la fonction de transfert du système en boucle fermée.
6. Toujours pour  $k_{ech}$ , déterminer la valeur finale de la sortie pour une entrée en échelon unité.
7. Comparer  $k_{ech}$  et  $k_{max}$ ... étonnant non, en général c'est l'inverse... mais à force de faire des hypothèses...

FIGURE C.38 – Système échantillonné bouclé et corrigé par un gain  $k_{ech}$ .

1<sup>ère</sup> année  
Mars 2013

## Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 1h

*Le correcteur PI dans tous ses états !*

Soit le système décrit par la fonction de transfert  $G(p)$  :

$$G(p) = \frac{A}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = \frac{Y(p)}{W(p)}$$

Applications numériques :  $A = 1, \tau_1 = 1, \tau_2 = 2$

### 1 Analyse du système

- Donner l'équation différentielle liant  $y(t)$  et ses dérivées à  $w(t)$ .

$$2p^2Y(p) + 3pY(p) + Y(p) = W(p)$$

$$2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = w(t)$$

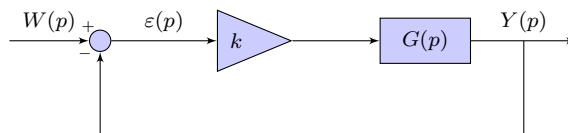
- Déterminer les pôles de la fonction de transfert.

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_1}, p_2 = -\frac{1}{\tau_2} \quad \text{AN : } p_1 = -1, p_2 = -1/2$$

- Le système est-il stable en boucle ouverte ?  
Oui, les pôles sont à partie réelle négative !

### 2 Correcteur de type P

Le système est bouclé et corrigé par un gain  $k$  tel que représenté en figure C.39.

FIGURE C.39 – Système bouclé et corrigé par un gain  $k$ .

- Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $BF(p) = \frac{Y(p)}{W(p)}$ .

$$BF(p) = \frac{k}{2p^2 + 3p + 1 + k}$$

2. Sauf erreur,  $BF(p)$  est un second ordre de type :

$$BF(p) = \frac{B}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Déterminer les valeurs de  $\xi$  et  $\omega_0$  en fonction de  $k$ .

$$BF(p) = \frac{k}{2p^2 + 3p + 1 + k} = \frac{B}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$$BF(p) = \frac{\frac{k}{k+1}}{\frac{2}{k+1}p^2 + \frac{3}{k+1}p + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \xi &= \frac{3}{2\sqrt{2(k+1)}} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k+1}{2}} \end{aligned}$$

3. Déterminer la valeur de  $k$ ,  $k_0$  telle que le système en boucle fermée présente un dépassement de 5%. Rappel : le premier dépassement est donné par la formule :

$$D1 = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 100e^{-\frac{\frac{3}{\sqrt{2(k+1)}}\pi}{\sqrt{1-\frac{9}{2(k+1)}}}} = 5$$

$$k_0 = 1/8 \frac{(\ln(20))^2 + 9\pi^2}{(\ln(20))^2} = 1.36$$

4. Avec  $k = k_0$ , déterminer l'erreur statique  $\varepsilon(\infty)$ .

$$\varepsilon(\infty) = \frac{1}{1 + k_0} = 0.46$$

### 3 Correcteur de type PI : Ziegler-Nichols

La réponse à un échelon unité du système est donné en figure C.40.

- Déterminer un correcteur PI de type Ziegler - Nichols adapté au système.  
Mesuré sur la figure C.40 :  $\tau = 0.38$ ,  $T = 4.0$   
réglabilité = 10.4, paramètres du PI :  $K = 9.35$ ,  $Ti = 1.27$

### 4 Correcteur de type PI : Synthèse fréquentielle

- Tracer le diagramme de Bode asymptotique de  $G(p)$  (module et phase). Préciser quelques points remarquables.  
Voir : figure C.41.
- Tracer le diagramme de Bode réel en module seulement. (Rappel : l'erreur entre le diagramme asymptotique et le diagramme réel est de 1 dB à l'octave.) Voir : figure C.41.
- Déterminer sur le diagramme de Bode le gain  $k = k_m$ , tel que le système présente une marge de phase de  $45^\circ$ .

Sur le diagramme asymptotique, la réponse est :  $\Delta\phi = 45^\circ$  pour  $\omega = 1\text{rad.s}^{-1}$ . Le gain est alors de :

$$k = \underbrace{6\text{dB}}_{6\text{dB/octave}} + \underbrace{3\text{dB}}_{\text{erreur à } \omega=1\text{rad.s}^{-1}} + \underbrace{1\text{dB}}_{\text{erreur à l'octave } (\omega=0.5\text{rad.s}^{-1})} = 10\text{dB} = 3.16$$

Sur le diagramme réel, la réponse est :  $\Delta\phi = 45^\circ$  pour  $\omega \simeq 2\text{rad.s}^{-1}$ . Le gain est alors de :  $k=20$  dB

- Avec  $k = k_m$ , déterminer l'erreur statique  $\varepsilon(\infty)$ .

$$\varepsilon(\infty) = \frac{1}{1 + 3.16} = 0.24$$

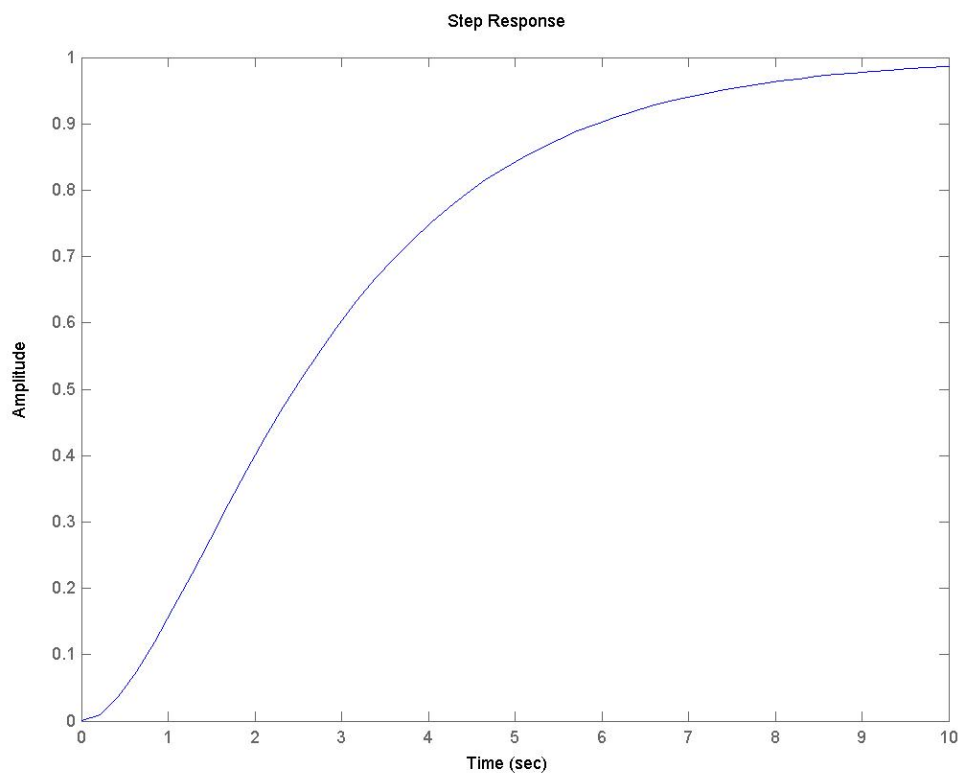
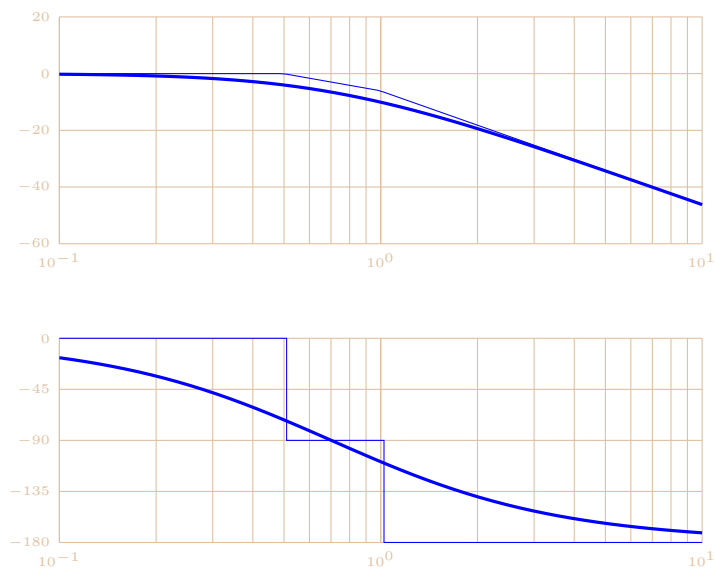


FIGURE C.40 – Réponse indicielle.

FIGURE C.41 – Diagramme de Bode de  $G(p)$ .

5. Tracer le diagramme de Bode asymptotique (module et phase) d'un correcteur PI

$$C(p) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

Préciser le point remarquable (module et phase) en fonction de  $K$  et  $T_i$ .

6. Calculer alors  $T_i$  tel que le diagramme de Bode asymptotique de  $C(p)G(p)$  ne présente qu'une pulsation

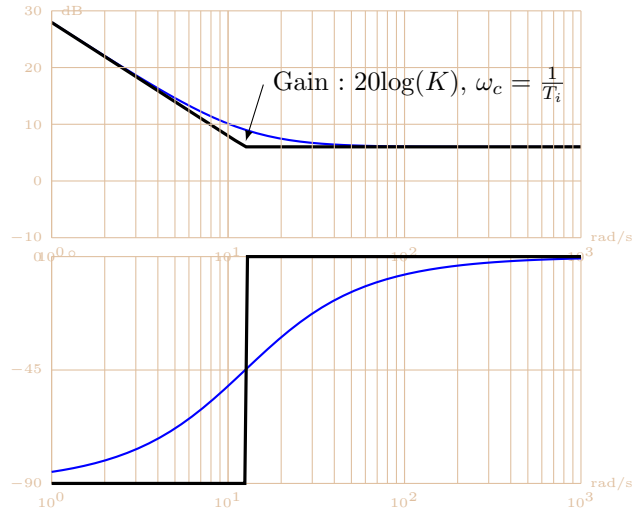


FIGURE C.42 – Diagramme de Bode du correcteur PI.

de cassure.

$$T_i = \tau_2$$

- En prenant la valeur de  $T_i$  calculée précédemment, déterminer  $K$  tel que le système présente une marge de phase de  $45^\circ$ .

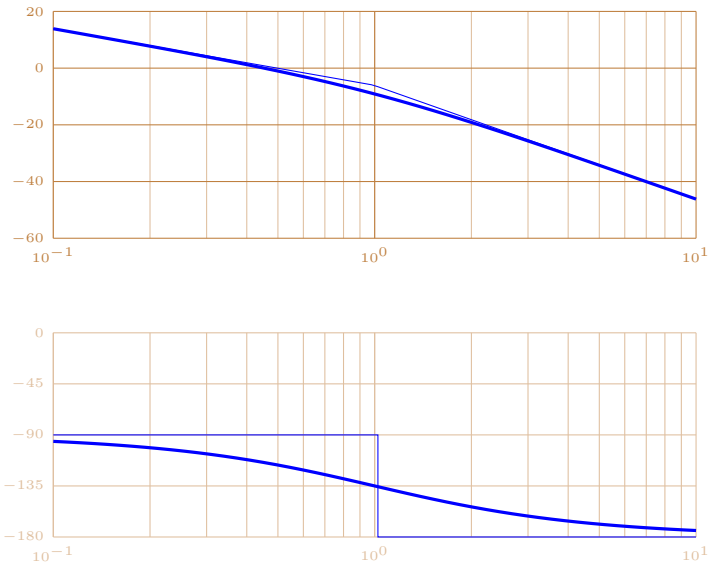


FIGURE C.43 – Diagramme de Bode du système corrigé en BO ( $PI(p) + G(p)$ ) avec  $T_i = \tau_2$ .

$$K = 9\text{dB} = 2.8184$$

- Quelle est l'erreur statique du système en boucle fermée? Nulle, évidemment!

## 5 Analyse et correction du système échantillonné

La période d'échantillonnage est fixée à  $T_e = \tau_1/10$ .

- Déterminer la transformée en  $z$  de  $G(p)$  précédé d'un bloqueur d'ordre 0.

$$\mathcal{L} \left( \frac{B_0(p)}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \right) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 - (e^{-T_e/\tau_1} + e^{-T_e/\tau_2})z + e^{-T_e/\tau_1} e^{-T_e/\tau_2}}$$

avec :  $b_1 = \frac{\tau_1(1-e^{-T_e/\tau_1})-\tau_2(1-e^{-T_e/\tau_2})}{\tau_1-\tau_2}$  et  $b_0 = e^{-T_e/\tau_1}e^{-T_e/\tau_2} - \frac{\tau_1 e^{-T_e/\tau_2} - \tau_2 e^{-T_e/\tau_1}}{\tau_1 - \tau_2}$  AN :

$$G(z) = \frac{0.002379z + 0.002263}{z^2 - 1.856z + 0.8607}$$

2. Le système est bouclé et corrigé par un gain  $k_{ech}$  tel que représenté en figure C.44, déterminer les pôles de la fonction de transfert du système en boucle fermée en fonction de  $k_{ech}$ . En posant :

$$G(z) = \frac{b_1z + b_0}{z^2 + a_1z + a_0}$$

La boucle fermée s'écrit :

$$BF(z) = \frac{K(b_1z + b_0)}{z^2 + (a_1 + k_{ech}b_1)z + (a_0 + k_{ech}b_0)}$$

$$P_{1,2} = -1/2 a_1 - 1/2 k_{ech}b_1 \pm 1/2 \sqrt{a_1^2 + 2 a_1 k_{ech}b_1 + k_{ech}^2 b_1^2 - 4 k_{ech}b_0 - 4 a_0}$$

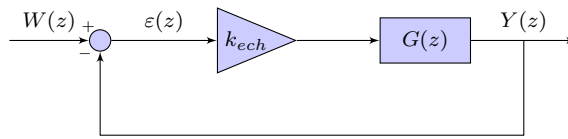


FIGURE C.44 – Système échantillonné bouclé et corrigé par un gain  $k_{ech}$ .

3. En utilisant le critère de Jury, déterminer le gain maximal  $k_{ech}$  tel que le système bouclé reste stable.

$$(a) \sum_{i=0}^n a_i^0 = D(1) > 0 \\ \implies k_{ech} < -\frac{1+a_1+a_0}{b_1+b_0} \implies k_{ech} > -1.0124$$

$$(b) (-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^0 = (-1)^n D(-1) > 0 \\ \implies k_{ech} < -\frac{-1+a_1-a_0}{b_1-b_0} \implies k_{ech} < 32040.51$$

$$(c) |a_0^0| - a_n^0 < 0 \\ \implies -\frac{a_0+1}{b_0} < k_{ech} < -\frac{a_0-1}{b_0} \implies -822.2271321 < k_{ech} < 61.55545736$$

Donc :  $-1.0124 < k_{ech} < 61.55545736$

4. Toujours pour  $k_{ech}$ , déterminer la valeur finale de la sortie pour une entrée en échelon unité. Pas d'IT pur, donc erreur = cte :

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})BF(z) * \frac{1}{(1 - z^{-1})} = BF(1) = 0.983$$

5. On se propose de placer en lieu et place de  $k_{ech}$  un correcteur de type PI numérique de la forme :

$$C(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = k_p + k_i T_e \frac{z}{z-1}$$

Donner l'équation récurrente liant  $u(k)$  à  $u(k-1)$  et  $\varepsilon(k-i)$ .

$$u_k = u_{k-1} + (k_i T_e + k_p) \varepsilon(k) - k_p \varepsilon(k-1)$$

6. Calculer l'erreur de traînage (système bouclé soumis à une rampe d'entrée unité).

$$\varepsilon_t(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{T_e z}{(z-1)^2} \frac{1}{1 + C(z)G(z)}$$

$$\varepsilon_t(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{T_e z}{(z-1)^2} \frac{1}{1 + \left(k_p + k_i T_e \frac{z}{z-1}\right) \left(\frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}\right)}$$

$$\varepsilon_t(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{T_e z}{(z-1)^2} \frac{(z-1)(z^2 + a_1 z + a_0)}{(z-1)(z^2 + a_1 z + a_0) + (k_p(z-1) + k_i T_e z)(b_1 z + b_0)}$$

$$\varepsilon_t(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T_e(z^2 + a_1 z + a_0)}{(k_i T_e z)(b_1 z + b_0)} = \frac{(1 + a_1 + a_0)}{k_i(b_1 + b_0)}$$

## Examen d'automatique

Tous documents autorisés, durée : 2h

*Les résultats seront plus concis et les réponses un peu plus "faciles" à trouver en utilisant la forme en  $z^{-1}$ , sauf pour l'application du critère de Jury, qui implique la forme en  $z$ .*

## 1 Partie 1 (6 pts, 40mn) De la compensation de pôles....

Dans cette partie nous allons étudier le phénomène de compensation de pôles et de zéros stables ou instables pour en conclure que la compensation de pôles instables ou de pôles extérieurs au cercle unité rend le système instable.

## 1.1 Compensation de pôles stables

Dans cette partie le pôle stable sera compensé par un zéro intérieur au cercle unité.  
Soit le schéma suivant :

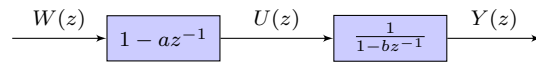


FIGURE C.45 – Compensation d'un pôle stable par un zéro intérieur au cercle unité.

**Compensation parfaite : Dans cette partie :  $a = b = 0.5$**

1. En vous référant à la figure C.45, déterminer la relation de récurrence liant  $u_k$  et  $w_k$ , originaux de  $U(z)$  et  $W(z)$  respectivement.

$$u_k = w_k - aw_{k-1}$$

2. En supposant que  $W(z)$  est un échelon unité, déterminer les 5 premiers échantillons de  $u_k$ .

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 0.5 \\ u_2 &= 0.5 \\ u_3 &= 0.5 \\ u_4 &= 0.5 \end{aligned}$$

3. De la même façon, déterminer la relation de récurrence liant  $y_k$  et  $u_k$ , originaux de  $Y(z)$  et  $U(z)$  respectivement.

$$y_k = u_k + by_{k-1}$$

4. En appliquant à  $u_k$  les échantillons déterminés précédemment, déterminer les 5 premiers échantillons de  $y_k$ .

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_1 &= 1 \\ y_2 &= 1 \\ y_3 &= 1 \\ y_4 &= 1 \end{aligned}$$



5. Tracer sur le même graphique les 5 premiers échantillons de  $w_k$ ,  $u_k$  et  $y_k$ .

**Compensation imparfaite : Dans cette partie :  $a = 0.5$  et  $b = 0.4$**

6. En appliquant à  $u_k$  les échantillons déterminés précédemment, déterminer les 5 premiers échantillons de  $y_k$ .

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_1 &= 0.9 \\ y_2 &= 0.86 \\ y_3 &= 0.844 \\ y_4 &= 0.838 \end{aligned}$$

7. Tracer sur le même graphique les 5 premiers échantillons de  $w_k$ ,  $u_k$  et  $y_k$ .  
8. Quelle sera la valeur finale de  $y_k$ ?

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{1 - az^{-1}}{1 - bz^{-1}}$$

Donc le gain est :

$$\frac{Y(1)}{W(1)} = \frac{1 - a}{1 - b} = 0.5/0.6 = 0.8333$$

## 1.2 Compensation de pôles instables

Dans cette partie le pôle instable sera compensé par un zéro extérieur au cercle unité.

**Compensation imparfaite : Dans cette partie :  $a = 2$  et  $b = 1.9$**

1. Toujours en vous référant à la figure C.45, déterminer la relation de récurrence liant  $u_k$  et  $w_k$ , originaux de  $U(z)$  et  $W(z)$  respectivement.

$$u_k = w_k - aw_{k-1}$$

2. En supposant que  $W(z)$  est un échelon unité, déterminer les 5 premiers échantillons de  $u_k$ .

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= -1 \\ u_2 &= -1 \\ u_3 &= -1 \\ u_4 &= -1 \end{aligned}$$

3. Au vu de la séquence  $u_k$  déterminée que peut on conclure quand à la stabilité d'un système présentant un zéro extérieur au cercle unité?

La suite  $u_k$  ne diverge pas, c'est bien stable!

4. En appliquant à  $u_k$  les échantillon déterminés précédemment, déterminer les 5 premiers échantillons de  $y_k$ .

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_1 &= 0.9 \\ y_2 &= 0.71 \\ y_3 &= 0.349 \\ y_4 &= -0.337 \end{aligned}$$

5. Tracer sur le même graphique les 5 premiers échantillons de  $w_k$ ,  $u_k$  et  $y_k$ .

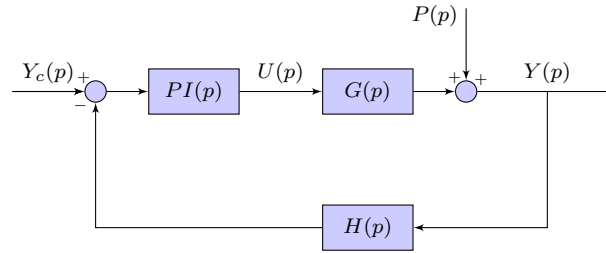


FIGURE C.46 – Schéma bloc du système asservi par un PI.

## 2 Partie 2 (8 pts, 40mn)

La figure C.46 représente le système à asservir  $G(p)$  et le capteur utilisé  $H(p)$ . Les fonctions de transfert sont :

$$G(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)} \quad \text{et} \quad H(p) = \frac{2}{(1 + \tau_c p)}$$

Applications numériques :  $\tau = 1\text{s}$  et  $\tau_c = 0.2\text{s}$

### Asservissement analogique

1. Faisant l'hypothèse que la constante de temps  $\tau_c$  peut être assimilée à un retard pur :

$$\frac{1}{(1 + \tau_c p)} \simeq e^{-\tau_c p}$$

Déterminer un correcteur PI de type Ziegler-Nichols.

$T = 1, \tau = 0.2$  et  $E = 2$  donc  $a = 2$

$K = 0.9 \frac{1}{a\tau} = 2.25$  et  $T_i = 3.3\tau = 0.66$

### Asservissement numérique

La structure de l'asservissement numérique est donnée en figure C.47.

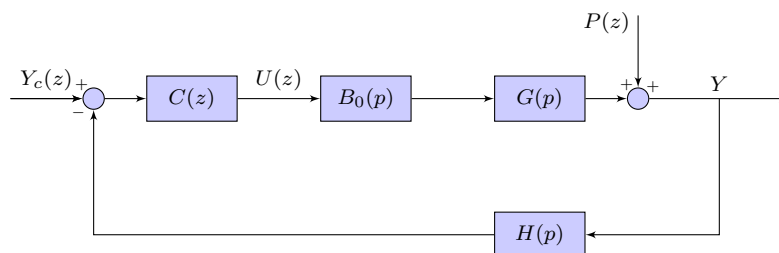


FIGURE C.47 – Schéma bloc du système asservi avec un correcteur numérique.

2. L'objectif étant de rendre le système bouclé aussi rapide que le capteur une fois la boucle fermée. Proposer une période d'échantillonnage. Par exemple  $T_e = \tau_c/5 = 0.04$ .
3. Quel que soit le résultat de la question précédente, calculer  $G(z) = \mathcal{Z}[B_0(p)G(p)]$  la fonction de transfert du système échantillonné précédé d'un bloqueur d'ordre 0 en prenant  $T_e = 0.1\text{s}$ .

$$\frac{(1-a)z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

avec  $a = e^{-T_e \tau}$  Applications numériques :

$$G(z) = \frac{0.09516z^{-1}}{1 - 0.9048z^{-1}}$$

4. Calculer  $GH(z) = \mathcal{Z}[B_0(p)G(p)H(p)]$  la fonction de transfert du système échantillonné précédé d'un bloqueur d'ordre 0 en prenant  $T_e = 0.1s$ .

$$\mathcal{Z}\left[\frac{B_0(p)}{(1+\tau p)(1+\tau_c p)}\right] = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 - (e^{-T_e/\tau} + e^{-T_e/\tau_c})z + e^{-T_e/\tau}e^{-T_e/\tau_c}}$$

avec :

$$b_1 = \frac{\tau(1-e^{-T_e/\tau}) - \tau_c(1-e^{-T_e/\tau_c})}{\tau - \tau_c}$$

$$b_0 = e^{-T_e/\tau}e^{-T_e/\tau_c} - \frac{\tau e^{-T_e/\tau_c} - \tau_c e^{-T_e/\tau}}{\tau - \tau_c}$$

Applications numériques :

$$GH(z) = \frac{(0.04117 + 0.03372z^{-1})z^{-1}}{1 - 1.511z^{-1} + 0.5488z^{-2}} = \frac{0.04117(1 + 0.8189z^{-1})z^{-1}}{(1 - 0.9048z^{-1})(1 - 0.6065z^{-1})}$$

5. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée  $B_F(z) = \frac{Y(z)}{Y_c(z)}$  en fonction de  $G(z)$ ,  $GH(z)$  et  $C(z)$ .

$$B_F(z) = \frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)GH(z)}$$

On se propose de déterminer un correcteur par la méthode de Zdan tel que :

- le système présente une erreur permanente nulle pour une entrée en rampe.
- Le système en boucle fermée se comporte comme un système du premier ordre de constante de temps  $\tau_c$ .
- La perturbation, de type échelon, est rejetée.

6. Donner le modèle  $M(z)$  répondant au cahier des charges en boucle fermée.

$$M(z) = \frac{(1-b)z^{-1}}{1-bz^{-1}}$$

avec  $b = e^{-T_e/\tau_c}$  Applications numériques :

$$M(z) = \frac{qqc}{1 - 0.6065z^{-1}}$$

7. Le correcteur est décomposé en trois correcteurs

$$C(z) = C_1(z) C_2(z) C_3(z)$$

Déterminer le nombre d'intégrateurs purs pour remplir le cahier des charges. Donner le correcteur  $C_1(z)$ .

$$C_1(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$$

8. Décomposer le système à asservir sous la forme :

$$G(z) = \frac{B^+(z)B^-(z)}{A^+(z)A^-(z)} = \frac{0.09516z^{-1}}{1 - 0.9048z^{-1}}$$

$$GH(z) = \frac{0.04117(1 + 0.8189z^{-1})z^{-1}}{(1 - 0.9048z^{-1})(1 - 0.6065z^{-1})}$$

où  $B^+(z)$ ,  $B^-(z)$ ,  $A^+(z)$ ,  $A^-(z)$  sont des polynômes tels que :

$B^+(z)$  contient tous les zéros de  $G(z)$  intérieurs au cercle unité (dits "stables")

$B^-(z)$  contient tous les zéros de  $G(z)$  extérieurs au cercle unité (dits "instables")

ainsi que les retards purs du système

$A^+(z)$  contient tous les pôles de  $G(z)$  intérieurs au cercle unité (stables)

$A^-(z)$  contient tous les pôles de  $G(z)$  extérieurs au cercle unité (instables)

Pour  $G(z)$ , le pôle est en 0.9048 donc tout est compensable sauf le retard pur. Pour  $GH(z)$ , les pôles sont en 0.9048 et 0.6065, le zéro est en -0.8189 donc tout est compensable sauf le retard pur.

9. Déterminer la partie  $C_2(z)$  qui compensera les parties compensables de  $G(z)$ .

$$C_2(z) = \frac{1 - 0.9048z^{-1}}{0.09516}$$

10. En posant

$$C_3(z) = \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_2(z)}$$

donner l'équation diophantienne permettant de déterminer les polynômes  $\Delta_1(z)$  et  $\Delta_2(z)$ .

$$B_F(z) = \frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)GH(z)} = \frac{C_1(z) C_2(z) C_3(z)G(z)}{1 + C_1(z) C_2(z) C_3(z)GH(z)}$$

$$B_F(z) = \frac{\frac{1}{(1-z^{-1})^2} \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_2(z)} z^{-1}}{1 + \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_2(z)} C_2(z) GH(z)}$$

$$B_F(z) = \frac{\frac{1}{(1-z^{-1})^2} \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_2(z)} z^{-1}}{1 + \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_2(z)} \frac{1-0.9048z^{-1}}{0.09516} \frac{0.04117(1+0.8189z^{-1})z^{-1}}{(1-0.9048z^{-1})(1-0.6065z^{-1})}}$$

$$B_F(z) = \frac{\Delta_1(z)(1 - 0.6065z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2(1 - 0.6065z^{-1})\Delta_2(z) + 0.4326(1 + 0.8189z^{-1})z^{-1}\Delta_1(z)} = M(z) = \frac{qqc}{1 - 0.6065z^{-1}}$$

soit à résoudre

$$(1 - z^{-1})^2(1 - 0.6065z^{-1})\Delta_2(z) + 0.4326(1 + 0.8189z^{-1})z^{-1}\Delta_1(z) = 1 - 0.6065z^{-1}$$

11. En résolvant l'équation diophantienne déterminée précédemment, déterminer les polynômes  $\Delta_1(z)$  et  $\Delta_2(z)$ .  $\Delta_2(z) = 1 + 0.6529z^{-1}$  et  $\Delta_1(z) = 3.1139 - 3.7317z^{-1} + 1.1178z^{-2}$
12. Vérifiez la stabilité et la causalité du correcteur obtenu. Causal et stable.
13. Pour un échelon d'entrée  $Y_c(z)$ , calculer la sortie  $y(kT_e)$  lorsque  $k$  tends vers l'infini. Commenter le résultat obtenu.  $y(kT_e) \rightarrow 0.5$  c'est le gain du capteur qui provoque cela, l'erreur  $\varepsilon(kT_e)$  est bien nulle !

### 3 Partie 2 (7 pts, 40mn) Double intégrateur

Soit un système défini par sa fonction de transfert continue :

$$G(p) = \frac{1}{p^2(1 + \tau p)}$$

avec :  $\tau$  réel positif.

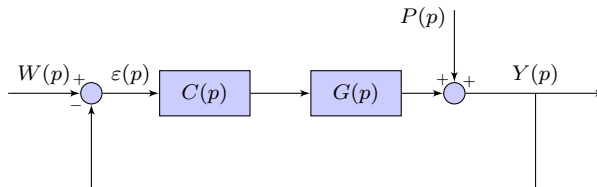


FIGURE C.48 – Système bouclé.

1. En supposant que  $C(p) = k_p + k_i/p$ , montrer qu'il n'existe pas de valeurs de  $k_i$  et  $k_p$  telles que le système soit stable en boucle fermée.  
En boucle fermée :

$$CG(p) = \frac{k_p p + k_i}{p^3(1 + \tau p)} \quad BF(p) = \frac{k_p p + k_i}{\tau p^4 + p^3 + k_p p + k_i}$$

Il manque un terme en  $p^2 \rightarrow$  instable. Et pour ceux qui ne le savent pas :  
Tableau de Routh

$p^4$	$\tau$	$0$	$k_i$
$p^3$	$1$	$k_p$	$0$
$p^2$	$-\tau k_p$	$k_i$	
$p^1$	$\frac{\tau k_p^2 + k_i}{\tau k_p}$	$0$	
$p^0$	$k_i$		

$$\begin{aligned}
 -\tau k_p &> 0 \Rightarrow k_p < 0 \\
 \frac{\tau k_p^2 + k_i}{\tau k_p} &> 0 \Rightarrow \tau k_p^2 + k_i < 0 \Rightarrow -k_i > \tau k_p^2 \Rightarrow k_i < 0
 \end{aligned}$$

2. On suppose à présent que le correcteur est de la forme PID "parfait" soit  $C(p) = k_p + k_i/p + k_d p$ . Déterminer un triplet d'inéquations à vérifier tel que le système soit stable en boucle fermée (la résolution n'est pas demandée). En boucle fermée :

$$CG(p) = \frac{k_d p^2 + k_p p + k_i}{p^3(1 + \tau p)} \quad BF(p) = \frac{k_d p^2 + k_p p + k_i}{\tau p^4 + p^3 + k_d p^2 + k_p p + k_i}$$

Tableau de Routh

$p^4$	$\tau$	$k_d$	$k_i$
$p^3$	$1$	$k_p$	$0$
$p^2$	$k_d - \tau k_p$	$k_i$	
$p^1$	$\frac{\tau k_p^2 + k_i}{k_d - \tau k_p}$	$0$	
$p^0$	$k_i$		

$$\left. \begin{aligned}
 k_d - \tau k_p &> 0 \\
 \frac{\tau k_p^2 + k_i}{k_d - \tau k_p} &> 0 \\
 k_i &> 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned}
 k_d - \tau k_p &> 0 \\
 k_i &> 0
 \end{aligned}$$

3. Déterminer la transformée en  $z$ ,  $G(z)$ , de  $G(p)$  précédée d'un bloqueur d'ordre 0, en prenant la période d'échantillonnage  $T_e$  égale à  $\tau$ . Vérifier que l'on a bien deux pôles en 1 et un pôle en  $a = e^{-T_e/\tau}$ . Applications numériques :  $T_e = \tau = 1$ .

$$Z \left[ \frac{B_0(p)}{p^2(1 + \tau p)} \right] = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 - (2 + a)z^2 + (1 + 2a)z - a} = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{(z - 1)^2(z - a)}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 a &= e^{-T_e/\tau} \\
 b_2 &= \frac{T_e^2}{2} + T_e \tau + \tau^2(1 - a) \\
 b_1 &= \left(\frac{T_e^2}{2} - 2\tau^2\right)(1 - a) + T_e \tau(1 + a) \\
 b_0 &= \tau^2(1 - a) - a T_e \left(\tau + \frac{T_e}{2}\right)
 \end{aligned}$$

4. On se propose de déterminer un correcteur  $C(z)$  tel que le système présente une réponse pile pour une **entrée en échelon** qui rejette des perturbations  $P(z)$  en rampe. Sans tenir compte de la perturbation, donner l'équation diophantienne liant  $K'(z)$  et  $L(z)$  (notations du cours).

$$G(z) = \frac{(0.1321 + 0.4197z^{-1} + 0.0803z^{-2})z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2(1 - az^{-1})} = \frac{0.1321(1 + 2.9721z^{-1})(1 + 0.2045z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2(1 - az^{-1})}$$

La boucle fermée  $F(z)$  doit répondre à deux équations :

$$\begin{aligned}
 1 - F(z) &= (1 - z^{-1})(1 - z^{-1})^2 K(z) \\
 F(z) &= L(z)B(z)
 \end{aligned}$$

$K(z)$  et  $L(z)$  sont deux polynômes inconnus solutions de l'équation diophantienne :

$$(1 - z^{-1})^3 K(z) + B(z)L(z) = 1$$

5. Déterminer l'ordre des polynômes  $K'(z)$  et  $L(z)$ . La résolution n'est pas demandée!  
 Résolution de l'équation diophantienne : forme  $\mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{B}\mathbb{Y} = \mathbb{C}$

$$\underbrace{(1 - z^{-1})^3}_{\mathbb{A}} \underbrace{K(z)}_{\mathbb{X}} + \underbrace{B(z)}_{\mathbb{B}} \underbrace{L(z)}_{\mathbb{Y}} = \underbrace{1}_{\mathbb{C}}$$

$$d^\circ \mathbb{C} \quad ? \quad d^\circ \mathbb{A} + d^\circ \mathbb{B}$$

$$0 \quad < \quad 3 + 3$$

donc l'équation est régulière, on en déduit que :

$$d^\circ \mathbb{X} = d^\circ \mathbb{B} - 1 \implies d^\circ K(z) = 2 \implies K(z) = k_0 + k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2}$$

$$d^\circ \mathbb{Y} = d^\circ \mathbb{A} - 1 \implies d^\circ L(z) = 2 \implies L(z) = l_0 + l_1 z^{-1} + l_2 z^{-2}$$

6. La résolution de l'équation diophantienne donne  $K'(z) = 1 + 1.8396z^{-1} + 0.3346z^{-2}$ , déterminer  $\varepsilon(z)$ .

$$\varepsilon(z) = \text{num}[W(z)] A^{-1}(z) K'(z) = (1 - z^{-1})^2 K'(z) = (1 - z^{-1})^2 (1 + 1.8396z^{-1} + 0.3346z^{-2}) = 1 - 0.1604z^{-1} - 2.3446z^{-2}$$

A noter : Pour une entrée en rampe  $W(z) = \frac{T_e z}{(z-1)^2} = \frac{T_e z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$

la synthèse est identique et les polynômes  $K$  et  $L$  restent identiques. Cependant, l'erreur  $\varepsilon(z)$  est différente!

$$\varepsilon_{rampe}(z) = \text{num}[W(z)] A^{-1}(z) K'(z) = \underbrace{z^{-1}}_{\substack{\text{numérateur} \\ \text{de } W(z)}} \underbrace{(1 - z^{-1})}_{\substack{\text{intégrateur pur non} \\ \text{utilisé de } G(z)}} K'(z)$$

$$= z^{-1} + 0.8396z^{-2} - 1.5050z^{-3} - 0.3346z^{-4}$$

Pour une entrée en parabole :  $W(z) = \frac{T_e^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$

$$\varepsilon_{parabole}(z) = \text{num}[W(z)] A^{-1}(z) K'(z) = \underbrace{z^{-1}(1 + z^{-1})}_{\substack{\text{numérateur} \\ \text{de } W(z)}} K'(z)$$

$$= z^{-1} + 2.8396z^{-2} + 2.1742z^{-3} + 0.3346z^{-4}$$

7. Vérifier la causalité et la stabilité de votre correcteur.  
 8. Déterminer la réponse  $Y(z)$  à une entrée  $W(z)$  en échelon.  
 9. Tracer la réponse  $y(kT_e)$  pour une entrée  $u_k$  en échelon.

## 4 Partie 4 (6 pts, 40mn) RST

Le système à asservir possède une transmittance en boucle ouverte  $G(z)$ .

$$G(z) = \frac{z - 0.8}{z(z - 0.6)}$$

### Cahier de charges en boucle fermée

- La fonction de transfert en boucle fermée devra être :

$$\frac{3.1(1 - 0.5z^{-1})z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1} + 0.05z^{-2}} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$$

On montrera, dans un premier temps, que le schéma de la figure C.49 est équivalent au schéma de la figure C.50. Puis on appliquera les méthodes classiques de détermination des polynômes  $R$ ,  $S$  et  $T$ .

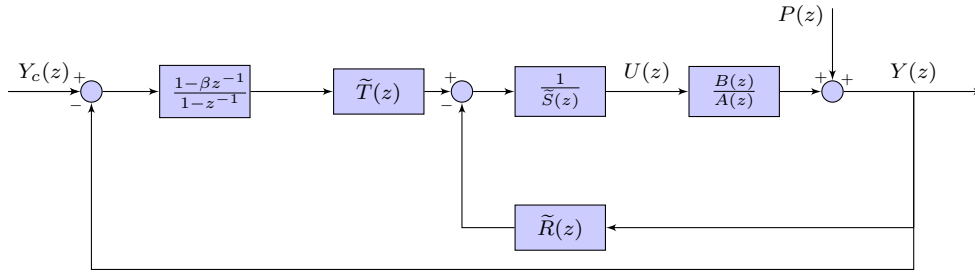


FIGURE C.49 – Principe de correction par correcteur RST avec action intégrale.  $P(z)$  est une perturbation de charge de type échelon.

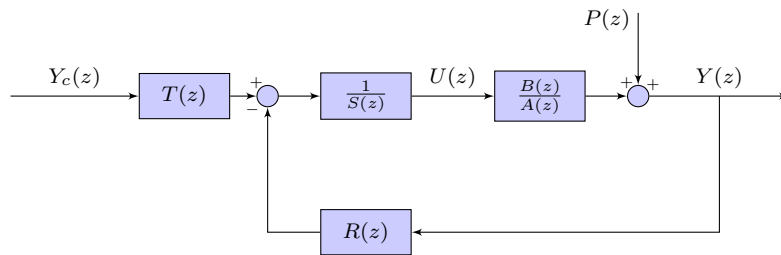


FIGURE C.50 – Correcteur RST classique.  $P(z)$  est une perturbation de charge de type échelon.

### Schéma équivalent

- Déterminer la commande  $U(z)$  sur le schéma de la figure C.49 en fonction de  $\tilde{R}(z)$ ,  $\tilde{S}(z)$ ,  $\tilde{T}(z)$ ,  $Y(z)$ ,  $Y_c(z)$  et  $\beta$ .

$$U(z) = \frac{1}{\tilde{S}(z)} \left[ -\tilde{R}(z)Y(z) + \tilde{T}(z) \frac{1 - \beta z^{-1}}{1 - z^{-1}} (Y_c(z) - Y(z)) \right]$$

$$\tilde{S}(z)(1 - z^{-1})U(z) = \tilde{T}(z)(1 - \beta z^{-1})Y_c(z) - \left[ \tilde{R}(z)(1 - z^{-1}) + \tilde{T}(z)(1 - \beta z^{-1})Y(z) \right]$$

- De la même façon, déterminer la commande  $U(z)$  sur le schéma de la figure C.50 en fonction de  $R$ ,  $S$ ,  $T$ ,  $Y(z)$ ,  $Y_c(z)$ .

$$S(z)U(z) = T(z)Y_c(z) - R(z)Y(z)$$

- Identifier les polynômes  $R$ ,  $S$  et  $T$  en fonction de  $\tilde{R}(z)$ ,  $\tilde{S}(z)$ ,  $\tilde{T}(z)$ .

$$\begin{aligned} S(z) &= \tilde{S}(z)(1 - z^{-1}) \\ R(z) &= \tilde{R}(z)(1 - z^{-1}) + \tilde{T}(z)(1 - \beta z^{-1}) \\ T(z) &= \tilde{T}(z)(1 - \beta z^{-1}) \end{aligned}$$

- Décomposer  $G(z)$  sous la forme :

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B^+(z)B^-(z)}{A^+(z)A^-(z)}$$

où  $B^+(z)$ ,  $A^+(z)$  sont compensables et  $B^-(z)$ ,  $A^-(z)$  ne le sont pas.

$$G(z) = \frac{z - 0.8}{z(z - 0.6)} = \frac{\overbrace{(1 - 0.8z^{-1})}^{B^+(z)} \overbrace{z^{-1}}^{B^-(z)}}{\underbrace{(1 - 0.6z^{-1})^2}_{A^+(z)}}$$

- Ecrire la fonction de transfert  $H(z) = \frac{Y(z)}{Y_c(z)}$  en fonction des polynômes  $R$ ,  $S$  et  $T$ , sans tenir compte de la perturbation  $P(z)$ . Ecrire cette même fonction  $H(z)$  en fonction de  $\tilde{R}(z)$ ,  $\tilde{S}(z)$  et  $\tilde{T}(z)$ .

$$H(z) = \frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{B(z)T(z)}{A(z)S(z) + B(z)R(z)} = \frac{B(z)\widetilde{T}(z)(1 - \beta z^{-1})}{A(z)\widetilde{S}(z)(1 - z^{-1}) + B(z)\left[\widetilde{R}(z)(1 - z^{-1}) + \widetilde{T}(z)(1 - \beta z^{-1})\right]}$$

6. En faisant les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(z) &= \widetilde{S}_1(z)B^+(z) \\ \widetilde{R}(z) &= \widetilde{R}_1(z)A^+(z) \\ \widetilde{T}(z) &= \widetilde{T}_1(z)A^+(z)\end{aligned}$$

simplifier la fonction de transfert  $H(z)$ .

$$H(z) = \frac{B^+(z)B^-(z)\widetilde{T}_1(z)A^+(z)(1 - \beta z^{-1})}{A^+(z)A^-(z)\widetilde{S}_1(z)B^+(z)(1 - z^{-1}) + B^+(z)B^-(z)\left[\widetilde{R}_1(z)A^+(z)(1 - z^{-1}) + \widetilde{T}_1(z)A^+(z)(1 - \beta z^{-1})\right]}$$

$$H(z) = \frac{B^-(z)\widetilde{T}_1(z)(1 - \beta z^{-1})}{A^-(z)\widetilde{S}_1(z)(1 - z^{-1}) + B^-(z)\left[\widetilde{R}_1(z)(1 - z^{-1}) + \widetilde{T}_1(z)(1 - \beta z^{-1})\right]}$$

sachant que  $B^-(z) = z^{-1}$  et que  $A^-(z) = 1$

$$H(z) = \frac{z^{-1}\widetilde{T}_1(z)(1 - \beta z^{-1})}{\widetilde{S}_1(z)(1 - z^{-1}) + z^{-1}\left[\widetilde{R}_1(z)(1 - z^{-1}) + \widetilde{T}_1(z)(1 - \beta z^{-1})\right]}$$

7. En écrivant l'égalité des numérateurs puis celle des dénominateurs de l'égalité :  $H(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$ , déterminer les polynômes  $\widetilde{R}_1(z)$ ,  $\widetilde{S}_1(z)$  et  $\widetilde{T}_1(z)$  qui seront, si les calculs sont justes, des constantes.

$$H(z) = \frac{z^{-1}\widetilde{T}_1(z)(1 - \beta z^{-1})}{\widetilde{S}_1(z)(1 - z^{-1}) + z^{-1}\left[\widetilde{R}_1(z)(1 - z^{-1}) + \widetilde{T}_1(z)(1 - \beta z^{-1})\right]} = \frac{3.1(1 - 0.5z^{-1})z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1} + 0.05z^{-2}}$$

Egalité des numérateurs :

$$H(z) = z^{-1}\widetilde{T}_1(z)(1 - \beta z^{-1}) = 3.1(1 - 0.5z^{-1})z^{-1}$$

$\widetilde{T}_1(z) = 3.1$  et  $\beta = 0.5$

Egalité des dénominateurs :

$$H(z) = \widetilde{S}_1(z)(1 - z^{-1}) + z^{-1}\left[\widetilde{R}_1(z)(1 - z^{-1}) + \widetilde{T}_1(z)(1 - \beta z^{-1})\right] = 1 + 0.5z^{-1} + 0.05z^{-2}$$

$$H(z) = \widetilde{S}_1(z)(1 - z^{-1}) + z^{-1}\widetilde{R}_1(z)(1 - z^{-1}) + 3.1(1 - 0.5z^{-1})z^{-1} = 1 + 0.5z^{-1} + 0.05z^{-2}$$

$$H(z) = \widetilde{S}_1(z)(1 - z^{-1}) + z^{-1}\widetilde{R}_1(z)(1 - z^{-1}) = 1 - 2.6z^{-1} + 1.6z^{-2} = (1 - z^{-1})(1 - 1.6z^{-1})$$

donc  $\widetilde{S}_1(z) = 1$  et  $\widetilde{R}_1(z) = -1.6$

8. Vérifier que l'erreur permanente entre  $Y$  et  $Y_c$  est nulle pour une entrée en échelon et ce, y compris pour une perturbation  $P(z)$  en échelon.